INGEGNERIA CIVILE - INGEGNERIA DEI TRASPORTI
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 24-02-2010

ESERCIZIO 1
Sia D il dominio nel piano x, z delimitato dalle circonferenze $x^2 + z^2 - x = 0$ e $x^2 + z^2 - 2x = 0$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse z.

SOLUZIONE
In coordinate polari $x = \rho \cos\theta$, $z = \rho \sin\theta$, il dominio è descritto dalle condizioni $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta \le \rho \le 2\cos\theta$. Applicando la formula per il volume di un solido di rotazione si trova:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) = 2\pi \iint_D x dx dz &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \rho\cos\theta \rho d\rho d\theta \\
&= \frac{14\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
&= \frac{14\pi}{3} \left[\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{7}{4}\pi^2.
\end{aligned}$$

Alternativamente, si può osservare che la circonferenza $x^2 + z^2 - x = 0$ è contenuta nella $x^2 + z^2 - 2x = 0$. Quindi il volume richiesto può essere ottenuto come differenza dei volumi dei due solidi di rotazione generati dai rispettivi cerchi. Dato che il baricentro geometrico di un cerchio coincide con il cerchio stesso, applicano il Teorema di Guldino troviamo:

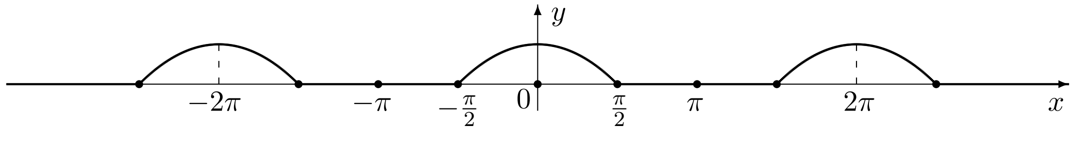
$$V = 2\pi \cdot 1 \cdot \pi - 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi^2.$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo 2π che in $(-\pi, \pi]$ vale:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE
La funzione è continua con la derivata prima continua a tratti. Quindi la serie convergerà assolutamente. Inoltre la funzione è pari e il suo grafico è il seguente:



I coefficienti dello sviluppo richiesto sono: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{2}{\pi}$,

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2},$$

e poi, per $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} [\cos(k+1)x + \cos(k-1)x]\, dx \\ =& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+1)x}{k+1} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{2}}{k+1} + \frac{\sin(k-1)\frac{\pi}{2}}{k-1}\right] \\ =& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k+1} - \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k-1}\right] = -\frac{2\cos\frac{k\pi}{2}}{\pi(k^2-1)}. \end{aligned}$$

Si ha poi $\cos\frac{k\pi}{2} = 0$ per k dispari, mentre per $k = 2m$ si ha $\cos\frac{k\pi}{2} = \cos m\pi = (-1)^m$. Quindi lo sviluppo è:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2\cos(k\pi/2)}{\pi(k^2-1)}\cos kx \equiv \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi(4m^2-1)}\cos 2mx,$$

con convergenza totale. *Osservazione 1*: se g è la sinusoide a semionda raddrizzata (presente come esercizio nelle note sulle serie di Fourier) si ha $f(x) = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e quindi si può usare lo sviluppo di g per ottenere quello di f. *Osservazione 2*: a_k si può calcolare anche integrando per parti.

ESERCIZIO 3

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + (u-1)u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \sqrt{x} + 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione di continuità. Si ha $q(u) = \frac{u^2}{2} - u$ e la funzione $q'[g(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$ è continua e crescente. Quindi si può applicare il metodo delle caratteristiche, le quali sono date $x = x_0$ per $x_0 < 0$ e $x = x_0 + \sqrt{x_0}t$ per $x_0 \geq 0$. Per $x < 0$ si ha $u \equiv 1$. Per $x \geq 0$ la soluzione in forma implicità è $u = \sqrt{x - (u-1)t} + 1$, che esplicitata fornisce $u(x,t) = \frac{2-t\pm\sqrt{t^2+4x}}{2}$. Dato che per $t \to 0^+$ si ha $\frac{2-t\pm\sqrt{t^2+4x}}{2} \to 1 \pm \sqrt{x}$, và scelta la funzione con il segno $+$. In conclusione, la soluzione del nostro problema è:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < 0, t \geq 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{t^2+4x}-t}{2} & x \geq 0, t \geq 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Detta u la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<2, 0<y<\frac{\pi}{2}, \\ u(x,0)=\frac{\pi}{2}e^x & 0\le x\le 2, \\ u\left(x,\frac{\pi}{2}\right)=0 & 0\le x\le 2, \\ u(0,y)=\frac{\pi}{2}-y & 0\le y\le \frac{\pi}{2}, \\ u(2,y)=-\frac{2e^2}{\pi}y^2+\frac{\pi}{2}e^2 & 0\le y\le\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

dimostrare che si ha $u(x,y)\ge e^x\cos y$ per ogni $(x,y)\in[0,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

SOLUZIONE
Notiamo anzitutto che la funzione $e^x\cos y$ è armonica. Quindi, per risolvere il problema, basta studiare i valori di u sulla frontiera del rettangolo $[0,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e confrontarli con quelli di $e^x\cos y$. Esaminiamo il raccordo dei dati al bordo: si ha

$$\left[\frac{\pi}{2}e^x\right]_{x=0}=\frac{\pi}{2}=\left[\frac{\pi}{2}-y\right]_{y=0}, \qquad \left[\frac{\pi}{2}e^x\right]_{x=2}=\frac{\pi}{2}e^2=\left[-\frac{2e^2}{\pi}y^2+\frac{\pi}{2}e^2\right]_{y=0},$$
$$\left[\frac{\pi}{2}-y\right]_{y=\pi/2}=0, \qquad \left[-\frac{2e^2}{\pi}y^2+\frac{\pi}{2}e^2\right]_{y=\pi/2}=0,$$

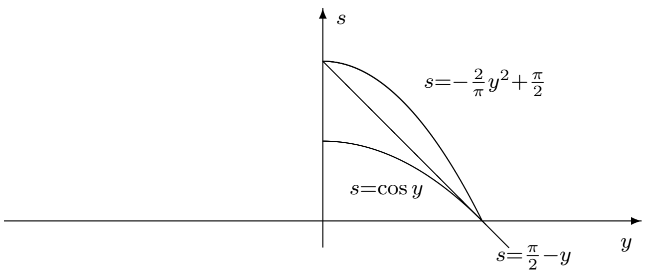
e quindi u è continua in tutto il rettangolo chiuso. Confrontiamo prima i dati sui lati paralleli all'asse y. Si ha

$$[e^x\cos y]_{x=0}=\cos y\le\frac{\pi}{2}-y=u(0,y) \qquad \text{per} \quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}$$

perché $s=\frac{\pi}{2}-y$ è la tangente alla funzione $s=\cos y$ in $y=\frac{\pi}{2}$ ed il coseno è concavo in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Si ha anche

$$[e^x\cos y]_{x=2}=e^2\cos y\le-\frac{2e^2}{\pi}y^2+\frac{\pi}{2}e^2=u(2,y) \qquad \text{per} \quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}$$

perché in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ la retta $s=\frac{\pi}{2}-y$ è una corda della funzione concava $s=-\frac{2}{\pi}y^2+\frac{\pi}{2}$ e quindi $\cos y\le\frac{\pi}{2}-y\le-\frac{2}{\pi}y^2+\frac{\pi}{2}$.



Sulle basi del rettangolo si ha:

$$[e^x\cos y]_{y=0}=e^x\le\frac{\pi}{2}e^x=u(x,0), \qquad [e^x\cos y]_{y=\pi/2}=0=u\left(x,\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{per } 0\le x\le 2.$$

Da queste maggiorazioni deduciamo che $e^x \cos y \leq u(x,y)$ sulla frontiera del rettangolo ed essendo queste entrambe funzioni armoniche, il principio del massimo ci permette di estendere la disuguaglianza a tutto il rettangolo.

ESERCIZIO 5
a) Verificare che per $a \neq 0$ la funzione $u(x,t) = \frac{2}{1+e^{(x-t)/a}}$ risolve l'equazione $u_t + uu_x = au_{xx}$.

(b) Supponendo $a > 0$, studiare il grafico della funzione $x \mapsto u(x,t)$, per $t > 0$ fissato.

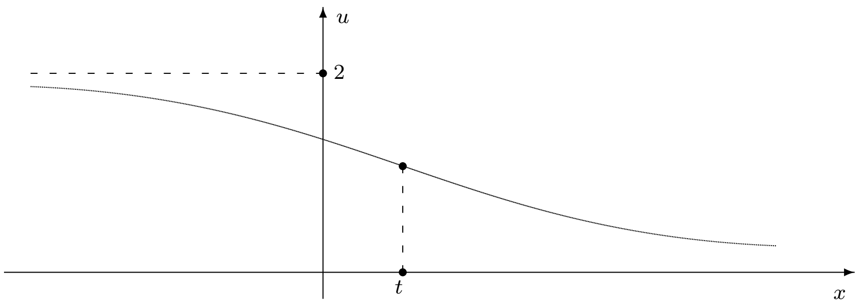
(c)Determinare il limite $w(x,t) = \lim_{a \to 0^+} u(x,t)$ ed interpretare il risultato ottenuto.

SOLUZIONE
(a) I calcoli sono elementari ma li riportiamo: si ha

$$u_t = \frac{2e^{(x-t)/a}}{a\left[1+e^{(x-t)/a}\right]^2}, \qquad u_x = -\frac{2e^{(x-t)/a}}{a\left[1+e^{(x-t)/a}\right]^2}, \qquad u_{xx} = \frac{2e^{(x-t)/a}\left[e^{(x-t)/a}-1\right]}{a^2\left[1+e^{(x-t)/a}\right]^3},$$

ed è immediato verificare che $u_t + uu_x = au_{xx}$.

(b) Dal punto precedente vediamo che per $a, t > 0$ la funzione $x \mapsto u(x,t)$ ha la derivata sempre negativa, e quindi è strettamente decrescente. Invece il segno della derivata seconda è determinato dal fattore $e^{(x-t)/a} - 1$. Si ha $e^{(x-t)/a} - 1 \geq 0$ per $x \geq t$ e quindi la funzione è concava per $x < t$, convessa per $x \geq t$ e ha un flesso in $x = t$. Inoltre si ha $\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 2$ e poi $\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0$. Quindi un grafico qualitativo di $x \mapsto u(x,t)$ è il seguente:



(c) Si ha:

$$w(x,t) = \lim_{a\to 0^+} u(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{1+e^{-\infty}} = & 2 \quad x < t, \\ & 1 \quad x = t, \\ \frac{2}{1+e^{+\infty}} = & 0 \quad x > t, \end{cases}$$

e l'equazione diventa $w_t + ww_x = 0$. Trascurando il valore di w lungo la retta $x = t$, tale funzione corrisponde esattamente alla soluzione (del tipo onda d'urto) del problema di Riemann

$$\begin{cases} w_t + ww_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

In particolare, si ritrova la condizione di Rankine-Hugoniot (che fornisce la pendenza di $x = t$).