INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 21-07-2010 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare l'integrale $\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove V è il volume racchiuso dalle superfici $z = 1$, $z = -1$, $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ ed $\vec{F} = (\frac{x^3}{3}, zy, zy^2)$.

SOLUZIONE
V è un cono circolare retto che in coordinate cilindriche è descritto dalle condizioni $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-1 \leq z \leq 1$, $0 \leq \rho \leq 1 - z$. Si ha poi $\mathrm{div}\vec{F} = x^2 + z + y^2$. Usando il Teorema della divergenza si ha:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V (x^2 + y^2 + z) dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{1-z} (z + \rho^2)\rho d\rho dz d\theta \\ = 2\pi \int_{-1}^{1} \left[\frac{\rho^4}{4} + z\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z} dz = \pi \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{2}z^4\right] dz = \frac{28}{15}\pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che g ha una discontinuità in $\frac{\pi}{2}$ e quindi la convergenza non sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti.

$$\begin{aligned} b_k = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left[-x^2 \frac{\cos kx}{k} + \frac{2}{k^2} x \sin kx + \frac{2}{k^3} \cos kx\right]_0^{\pi/2} \\ = & -\frac{\pi}{2k} \cos k\frac{\pi}{2} + \frac{2}{k^2} \sin k\frac{\pi}{2} + \frac{4}{k^3\pi} \cos k\frac{\pi}{2} - \frac{4}{k^3\pi}.\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2k} \cos k\frac{\pi}{2} + \frac{2}{k^2} \sin k\frac{\pi}{2} + \frac{4}{k^3\pi} \cos k\frac{\pi}{2} - \frac{4}{k^3\pi}\right) \sin kx = \begin{cases} g(x) & x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \\ \frac{\pi^2}{8} & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + \left(1 - t^2 + \frac{x}{1+t}\right) u_x = 2t & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per un'equazione del primo ordine a coefficienti variabili. L'equazione delle caratteristiche è $x' - \frac{x}{1+t} = 1 - t^2$. Applicando il metodo della variazione della costante arbitraria, cerchiamo la sua soluzione nella forma $x(t) = v(t)(1+t)$. Si trova $v'(1+t) = 1 - t^2$, cioè $v' = 1 - t$, che integrata diventa $v(t) = t - \frac{t^2}{2} + C$. La soluzione generale quindi è: $x(t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} + C(1+t)$. Imponendo la condizione iniziale $x(0) = x_0$ troviamo $x_0 = C$ e quindi le due funzioni $x = \varphi(x_0, t) \equiv t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} + x_0(1+t)$, $x_0 = \psi(x,t) \equiv \frac{x - t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2}}{1+t}$.
L'equazione alle derivate parziali lungo le caratteristiche si riduce a

$$\begin{cases} U' = 2t \\ U(0) = e^{x_0} \end{cases}$$

il cui integrale generale è $U(x_0, t) = t^2 + e^{x_0}$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$u(x,t) = t^2 + \exp\left(\frac{x - t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2}}{1+t}\right).$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = x\cos x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore. Applicando la formula risolutiva e gli integrali notevoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(as)\, ds = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} \sin(sa) ds = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4},$$

troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (x + 2s\sqrt{t}) \cos(x + 2s\sqrt{t}) ds \\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} x\cos x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \cos(2s\sqrt{t}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \sin x \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} \sin(2s\sqrt{t}) ds \\ =& e^{-t} x\cos x - 2te^{-t} \sin x. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5 Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 12(x^2 - y^2) & x^2 + y^2 < 1 \\ u = y + 2x^2 - 2y^2 & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE
E' un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. Abbiamo:

$12(x^2-y^2) = 12r^2\cos^2\theta - 12r^2\sin^2\theta = 12r^2\cos 2\theta, \qquad (y+x^2-y^2)|_{x^2+y^2=1} = \sin\theta + 2\cos\theta$

e quindi in coordinate polari il problema diventa

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 12r^2\cos 2\theta & 0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi \\ U(1,\theta) = \sin\theta + 2\cos 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r,\theta) = v_1(r)\sin\theta + v_2(r)\cos 2\theta$. Per v_1 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r}v_1' - \frac{1}{r^2}v_1 = 0 \\ v_1(1) = 1, v_1 \text{ limitata}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_1(r) = r$. Per v_2 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_2'' + \frac{1}{r}v_2' - \frac{4}{r^2}v_2 = 12r^2 \\ v_2(1) = 2, v_2 \text{ limitata}, \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_2(r) = r^2 + r^4$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$\begin{aligned} U(r,\theta) =& r\sin\theta + (r^2+r^4)\cos 2\theta = y + (r^2+r^4)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ =& y + x^2 - y^2 + (x^2+y^2)(x^2-y^2) = y + x^2 - y^2 + x^4 - y^4. \end{aligned}$$