INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 23-06-2010 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, dove V è il volume racchiuso dalle superfici $x^2+y^2+z^2=2x$ e $x^2+y^2+z^2=4x$.

SOLUZIONE
Passando in coordinate sferiche, si ha:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz =& \int_0^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\sin\theta\cos\varphi}^{4\sin\theta\cos\varphi} \rho\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta \\
=&60\int_0^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^5\theta\cos^4\varphi d\varphi d\theta \\
=&60\left[-\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\pi}\left[\frac{3}{8}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi+\frac{1}{32}\sin 4\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
=&24\pi.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0,\pi]$ la funzione $g(x)=\cos x\sin^2 x$, esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che $g(0)=g(\pi)=0$ e quindi l'estensione periodica dispari di g è continua (e regolare a tratti). Possiamo dunque aspettarci la convergenza totale della serie. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti, utilizzando l'identità $\cos x\sin^2 x=\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$. Per $k\neq 1,3$ troviamo

$$\begin{aligned}
b_k =&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin^2 x\sin kx dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos x-\cos 3x)\sin kx dx \\
=&\frac{1}{4\pi}[\sin(k+1)x+\sin(k-1)x-\sin(k+3)x-\sin(k-3)x]dx \\
=&\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1}-\frac{\cos(k-1)x}{k-1}+\frac{\cos(k+3)x}{k+3}+\frac{\cos(k-3)x}{k-3}\right]_0^{\pi} \\
=&\frac{1}{4\pi}\left[1+(-1)^k\right]\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k-3}\right]=-\frac{4k\left[1+(-1)^k\right]}{\pi(k^2-1)(k^2-9)} \\
=&\begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ -\frac{8k}{\pi(k^2-1)(k^2-9)} & k \text{ pari.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Si vede poi facilmente che anche $b_1=b_3=0$. Si ha quindi:

$$g(x)=-\sum_{\substack{k=2\\k\neq 3}}^{\infty}\frac{4k[1+(-1)^k]}{\pi(k^2-1)(k^2-9)}\sin kx\equiv-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{16m}{\pi(4m^2-1)(4m^2-9)}\sin 2mx$$

per ogni $x \in [0, \pi]$ e la convergenza è totale come (già sapevamo) perché $b_{2m} \sim -\frac{1}{\pi m^3}$.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi \\ u(x,0) = 0, u(x,\pi) = \cos x \sin^2 x & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Dirichlet in un quadrato per l'equazione di Laplace. Si ha:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin kx \sinh ky, \qquad \text{dove} \qquad C_k = \frac{2}{\pi \sinh k\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin^2 x \sin kx dx.$$

Quindi, utilizzando i risultati dell'esercizio precedente, troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,y) = & -\sum_{\substack{k=2 \\ k\neq 3}}^{\infty} \frac{4k[1+(-1)^k]}{\pi(k^2-1)(k^2-9)\sinh k\pi} \sin kx \sinh ky \\ & \equiv -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{16m}{\pi(4m^2-1)(4m^2-9)\sinh 2m\pi} \sin 2mx \sinh 2my. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (x,y,z) \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,y,z,0) = (x^2+y^2)z & (x,y,z) \in \mathbb{R} \\ u_t(x,y,z,0) = xy\cos z, & (x,y,z) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Per utilizzare la formula di Kirchhoff, calcoliamo prima le medie sferiche dei dati. Si ha:

$$\begin{aligned} M_g(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[(x + r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (y + r\sin\theta\sin\varphi)^2 \right] (z + r\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi \\ =& \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x^2 + y^2 + r^2\sin^2\theta)(z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta = z(x^2+y^2) + \frac{2}{3} z r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_h(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (x + r\sin\theta\cos\varphi)(y + r\sin\theta\sin\varphi)\cos(z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\ =& \frac{xy}{2} \int_0^{\pi} \cos(z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{xy}{2r} \int_{z-r}^{z+r} \cos s ds \qquad (s = z + r\cos\theta) \\ =& \frac{xy}{2r} [\sin(z+r) - \sin(z-r)] = xy \frac{\sin r}{r} \cos z. \end{aligned}$$

Quindi

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{t[z(x^2+y^2)] + \frac{2}{3}zt^3\right\} + t\cdot xy\frac{\sin t}{t}\cos z = z(x^2+y^2) + 2zt^2 + xy\cos z\sin t.$$

ESERCIZIO 5 Discutere, al variare del parametro $\lambda \neq 0$, il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + (1+2\lambda u)u_x = 0 & x\in\mathbb{R}, t>0, \\ u(x,0) = g(x) & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{dove } g(x) \text{ è data da} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 2 & x>0. \end{cases}$$

SOLUZIONE

E' un problema di Riemann. Abbiamo $q(u) = u + \lambda u^2$, $q'(u) = 1 + 2\lambda u$ e $q''(u) = 2\lambda$. Quindi q è uniformemente convessa per $\lambda > 0$ e uniformemente concava per $\lambda < 0$. Essendo $u_- = -1 < u_+ = 2$, abbiamo un'onda d'urto per $\lambda < 0$ e un'onda di rarefazione per $\lambda > 0$. L'onda d'urto ha velocità pari a $\gamma = \frac{q(2)-q(-1)}{2+1} = \frac{2+4\lambda-(-1+\lambda)}{3} = 1+\lambda$, e quindi per $\lambda < 0$ la soluzione è:

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x < (1+\lambda)t \\ 2 & x > (1+\lambda)t. \end{cases}$$

Notiamo poi che la velocità dell'onda d'urto è positiva per $-1 < \lambda < 0$, è negativa per $\lambda < -1$ ed è nulla per $\lambda = -1$.

Per $\lambda > 0$ l'onda di rarefazione si trova risolvendo l'equazione $1 + 2\lambda u = x/t$, che fornisce immediatamente $u = \frac{x-t}{2\lambda t}$. Essendo $q'(-1) = 1 - 2\lambda$ e $q'(2) = 1 + 4\lambda$, la soluzione è:

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x < (1-2\lambda)t \\ \frac{x-t}{2\lambda t} & (1-2\lambda)t \leq x \leq (1+4\lambda)t \\ 2 & x > (1+4\lambda)t. \end{cases}$$