INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 24-09-2010

ESERCIZIO 1
Calcolare l'area della superficie che si ottiene ruotando la curva

$$\begin{cases} x = \sin t \\ \\ y = 1 + \cos^2 t \end{cases} \qquad \tfrac{\pi}{6} \le t \le \tfrac{\pi}{3}$$

attorno all'asse y.

SOLUZIONE

$$\begin{aligned} 2\pi \int_\gamma x ds =& 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin t \sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 t \cos^2 t} dt = 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin t \cos t \sqrt{1 + 4\sin^2 t} dt \\ =& 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4\sin^2 t)^{3/2} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6}\left(8 - 2^{3/2}\right). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ x - 1 & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE
I coeficienti valgono:

$$\begin{aligned} b_k =& 2\int_0^1 g(x) \sin k\pi x dx = 2\int_0^{1/2} (1 - 2x) \sin k\pi x dx + 2\int_{1/2}^1 (x - 1) \sin k\pi x dx \\ =& 2\left[-\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + 2x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} - 2\frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2} \right]_0^{1/2} + 2\left[-x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2} + \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \right]_{1/2}^1 \\ =& \frac{2}{k\pi} - \frac{6\sin(k\pi/2)}{k^2\pi^2} - \frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi}. \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x = \begin{cases} g(x) & x \ne 0, \frac{1}{2}, 1 \\ \frac{1}{2} & x = 0, 1 \\ -\frac{1}{4} & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = e^x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \le x \le 1, \\ u(0, t) = 2, u(1, t) = 3, & t > 0, \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}x + \frac{e}{2}x + \frac{7}{2} & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}x + \frac{e}{2}x + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

esaminando la velocità di convergenza alla distribuzione stazionaria.

SOLUZIONE

La distribuzione stazionaria si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -2u_{\mathrm{s}}'' = e^x, & 0 < x < 1 \\ u_{\mathrm{s}}(0) = 2, u_{\mathrm{s}}(1) = 3, & \end{cases}$$

e viene $u_{\mathrm{s}}(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(1+e)x + \frac{5}{2}$. La soluzione del problema è:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(1+e)x + \frac{5}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2k^2\pi^2 t} \sin k\pi x,$$

dove b_k è come nell'esercizio precedente. Essendo poi

$$|b_k| \le \frac{2}{\pi} \int_0^1 |g(x)| dx \le \frac{2}{\pi}$$

si ha:

$$|u(x,t) - u_{\mathrm{s}}| \le \frac{8}{\pi} e^{-2\pi^2 t} \qquad \text{per} \qquad t \ge \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 4

Determinare g definita in $[0,1]$ in modo tale che la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = x^3 & 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = x^3 - 1 & 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = -y & 0 \le y \le 1 \\ u(1,y) = g(y) & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

verifichi la condizione $u(x,y) \le x^2 - y^2$.

SOLUZIONE

Se si prende $g(y) = 1 - y$ si ha $u \le x^2 - y^2$ su i lati del quadrato e quindi, essendo anche $x^2 - y^2$ armonica, si ha $u \le x^2 - y^2$ in tutto il quadrato.

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,y,z,0) = xyz^3 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,y,z,0) = (x^2+y^2)z^2 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$
\begin{aligned}
M_g(x,y,z,r) =&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x+r\sin\theta\cos\varphi)(y+r\sin\theta\sin\varphi)(z+r\cos\theta)^3\sin\theta d\theta\\
=&\frac{xy}{2}\int_0^{\pi}(z+r\cos\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{xy}{2r}\int_{z-r}^{z+r}s^3ds \qquad\qquad (s=z+r\cos\theta)\\
=&xyz^3+xyzr^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_h(x,y,z,r) =&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[(x+r\sin\theta\cos\varphi)^2+(y+r\sin\theta\sin\varphi)^2](z+r\cos\theta)^2\sin\theta d\theta d\varphi\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x^2+y^2+r^2\sin^2\theta)(z^2+2zr\cos\theta+r^2\cos^2\theta)\sin\theta d\theta\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[(x^2+y^2)z^2\sin\theta+2zr(x^2+y^2)\cos\theta\sin\theta+r^2(x^2+y^2)\cos^2\theta\sin\theta\\
&+r^2z^2\sin^3\theta+2zr^3\cos\theta\sin^3\theta+r^4\cos^2\theta\sin^3\theta]d\theta\\
=&\frac{1}{2}\Bigg[-(x^2+y^2)z^2\cos\theta+zr(x^2+y^2)\sin^2\theta-\frac{1}{3}r^2(x^2+y^2)\cos^3\theta\\
&-r^2z^2\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)+\frac{1}{2}zr^3\sin^4\theta+r^4\left(\frac{1}{5}\cos^5\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg]_0^{\pi}\\
=&(x^2+y^2)z^2+\frac{1}{3}r^2(x^2+y^2)+\frac{2}{3}r^2z^2+\frac{2}{15}r^4.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =&\frac{\partial}{\partial t}[xyz^3t+xyzt^3]+z^2(x^2+y^2)t+\frac{1}{3}(x^2+y^2)t^3+\frac{2}{3}z^2t^3+\frac{2}{15}t^5\\
=&xyz^3+3xyzt^2+z^2(x^2+y^2)t+\frac{1}{3}(x^2+y^2)t^3+\frac{2}{3}z^2t^3+\frac{2}{15}t^5.
\end{aligned}
$$