INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA PROVA SCRITTA DEL 19-09-2011 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare l'integrale

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove $\vec{F} = (z^2, yx^2, zy^2)$ e V è il solido delimitato dalle superfici $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$, $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$ e $x^2+y^2+z^2 = 1$.

SOLUZIONE
Si ha div$\vec{F} = x^2 + y^2$ e quindi, in coordinate sferiche,

$$\begin{aligned}\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V (x^2+y^2) dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho^2 \sin\theta d\theta d\rho d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^4 \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} d\rho = \frac{9\sqrt{3}-1}{60}\pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica che in $(-\pi, \pi]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & -\pi < x < 0 \\ -2 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che f è discontinua in tutti i punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e quindi la convergenza non sarà totale. Essendo comunque regolare a tratti, potremo applicare il teorema di convergenza puntuale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}[x^2+3x]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi}[-2x]_0^\pi = -\pi + 1,$$

e per $k \ge 1$,

$$\begin{aligned}a_k =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left[2x\frac{\sin kx}{k} + 2\frac{\cos kx}{k^2} + 3\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi \\ =& \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{k^2} - 2\frac{\cos k\pi}{k^2}\right] = \frac{2[1-(-1)^k]}{k^2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari}, \\ \frac{4}{k^2\pi} & \text{per } k \text{ dispari}, \end{cases}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_k =&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left[-2x\frac{\cos kx}{k}+2\frac{\sin kx}{k^2}-3\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[2\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}\\
=&5\frac{(-1)^k-1}{k\pi}-\frac{2(-1)^k}{k}.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi:

$$
\frac{1-\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^k]}{k^2\pi}\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[5\frac{(-1)^k-1}{k\pi}-\frac{2(-1)^k}{k}\right]\sin kx
$$

$$
=\begin{cases} f(x) & x\neq k\pi\\ 1/2 & x=2k\pi\\ \frac{1}{2}-\pi & x=(2k+1)\pi,\end{cases}
$$

con convergenza puntuale. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^k]}{k^2\pi}\cos kx$ può essere scritta anche nella forma

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)^2\pi}\cos(2m+1)x.
$$

ESERCIZIO 3
Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale: $u_t - 4u_x + u = xe^{-t}\sin t$.

SOLUZIONE Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti. Applicando la formula risolutiva, ed indicando con $g(x)$ una generica funzione $C^1(\mathbb{R})$, si ha:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =&e^{-t}\int_0^t e^s[x-4(s-t)]\cdot e^{-s}\sin s ds + e^{-t}g(x+4t)\\
=&e^{-t}\int_0^t [(x+4t)\sin s - 4s\sin s]ds\\
=&e^{-t}\left[-(x+4t)\cos s+4s\cos s-4\sin s\right]_{s=0}^{s=t}+e^{-t}g(x+4t)\\
=&-xe^{-t}\cos t-4e^{-t}\sin t+(x+4t)e^{-t}+e^{-t}g(x+4t).
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases}
u_{tt}-\Delta u = 0 & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\
u(x,y,z,0)=y\cos z & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\
u_t(x,y,z,0)=x^2+y^2+z & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.
\end{cases}
$$

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 3. Le medie sferiche dei dati iniziali valgono:

$$
\begin{aligned}
M_g(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(y + r\sin\theta\sin\varphi)\cos(z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{\pi} y\cos(z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
(s = z + r\cos\theta) \qquad =& \frac{y}{2r}\int_{z-r}^{z+r}\cos s ds \\
=& \frac{y}{2r}[\sin(z+r) - \sin(z-r)] = y\frac{\sin r}{r}\cos z,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_h(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\big[(x + r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (y + r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (z + r\cos\theta)\big]\sin\theta d\theta d\varphi \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x^2 + y^2 + r^2\sin^2\theta + z + r\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
=& \frac{1}{2}\left[-(x^2+y^2+z)\cos\theta - r^2\cos\theta + \frac{r^2}{3}\cos^3\theta + \frac{r}{2}\cos^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
=& (x^2+y^2+z) + \frac{2}{3}r^2.
\end{aligned}
$$

Quindi, applicando la formula di Kirchhoff, si trova:

$$
u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}(y\sin t\cos z) + t\left[(x^2+y^2+z) + \frac{2}{3}t^2\right] = y\cos t\cos z + t(x^2+y^2+z) + \frac{2}{3}t^3.
$$

ESERCIZIO 5
Determinare $\max_Q u$ e $\min_Q u$ dove $Q = [0,1]\times[0,1]$ ed u è la soluzione del problema

$$
\begin{cases}
u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\
u(x,0) = x^3 - 3x + 1 & 0 \le x \le 1, \\
u(0,t) = 2t+1, u(1,t) = t-1 & 0 < t < 1.
\end{cases}
$$

SOLUZIONE
Le condizioni di raccordo sono verificate:

$$
(2t+1)\big|_{t=0} = 1 = (x^3 - 3x + 1)\big|_{x=0} \qquad \text{e} \qquad (x^3 - 3x + 1)\big|_{x=1} = -1 = (t-1)\big|_{t=0}.
$$

Si vede poi facilmente che $\max_{[0,1]}(x^3 - 3x + 1) = 1$, $\min_{[0,1]}(x^3 - 3x + 1) = -1$, $(2t+1)\big|_{t=1} = 3$ e $(t-1)\big|_{t=1} = 0$. Quindi

$$
\max_Q u \equiv \max_{\partial_p Q} u = 3 \qquad \text{e} \qquad \min_Q u \equiv \min_{\partial_p Q} u = -1.
$$