INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 20-07-2011

ESERCIZIO 1

Sia V il dominio nello spazio delimitato dai piani $z = 1$, $z = 2$ e dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Posto $\vec{F} = (2xy^2, 2zy, 2zx^2)$ calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

SOLUZIONE

In coordinate cilindriche il dominio si scrive nella forma:

$$\begin{cases} 1 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{9 - z^2}. \end{cases}$$

Inoltre: $\mathrm{div}\vec{F} = 2y^2 + 2z + 2x^2$. Quindi, applicando il teorema della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V \mathrm{div}\vec{F} dxdydz = \iiint_V (2x^2 + 2y^2 + 2z) dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} (2\rho^2 + 2z)\rho d\rho dz d\theta \\ &= 2\pi \int_1^2 \left[\frac{1}{2}\rho^4 + z\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{9-z^2}} dz \\ &= \pi \int_1^2 \left[z^4 - 2z^3 - 18z^2 + 18z + 81\right] dz = \left[\frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{2} - 6z^3 + 9z^2 + 81z\right]_{z=1}^{z=2} \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} - 8 - 48 + 36 + 162 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 6 - 9 - 81\right) = \pi \left(58 + \frac{67}{10}\right) = \frac{647}{10}\pi. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2} & \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza dello sviluppo ottenuto.

SOLUZIONE

Osserviamo che la funzione g è continua in $[0, \pi]$:

$$x^2|_{x=\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} = \left(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2}\right)\Big|_{x=\pi/2}.$$

Inoltre la derivata prima è continua a tratti e valgono le condizioni di raccordo: $g(0) = 0 = g(\pi)$. Quindi avremo convergenza totale. Si ha poi:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2}\right)\sin kx dx \\
=& \frac{2}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos kx}{k} + 2x\frac{\sin kx}{k^2} + 2\frac{\cos kx}{k^3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\pi}{2}\frac{\cos kx}{k} - \frac{\pi}{2}\frac{\sin kx}{k^2} - \frac{\pi^2}{2}\frac{\cos kx}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} \\
=& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{4}\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k} + \pi\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} + 2\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k^3} - \frac{2}{k^3}\right] \\
&+ \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}\frac{\cos k\pi}{k} - \frac{\pi^2}{4}\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k} + \frac{\pi}{2}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} - \frac{\pi^2}{2}\frac{\cos k\pi}{k} + \frac{\pi^2}{2}\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k}\right] \\
=& 3\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} + 4\frac{\cos\frac{k\pi}{2} - 1}{k^3\pi}.
\end{aligned}$$

Quindi si ha, per ogni $x \in [0, \pi]$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(3\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} + 4\frac{\cos\frac{k\pi}{2} - 1}{k^3\pi}\right)\sin kx,$$

con convergenza totale.

ESERCIZIO 3

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria $u_{\rm s}(x)$, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 7u_{xx} = -42x, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) + x^3 & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = \pi^3 & t > 0, \end{cases}$$

dove $g(x)$ è come nell'esercizio precedente. Dare anche una stima della convergenza di u ad $u_{\rm s}$.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Dirichlet non omogeneo per l'equazione del calore non omogenea. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} -7u_{\rm s}'' = -42x, \ 0 < x < \pi \\ u_{\rm s}(0) = 0, u_{\rm s}(\pi) = \pi^3. \end{cases}$ La soluzione generale è $u_{\rm s}(x) = x^3 + C_1 x + C_2$ e imponendo le condizioni al contorno si trova: $C_2 = 0$, $\pi^3 + C_1\pi + C_2 = \pi^3$, da cui ricaviamo $C_1 = 0$ e $u_{\rm s}(x) = x^3$. Inoltre, ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_{\rm s}(x)$, la funzione v deve risolvere il seguente problema di Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} v_t - 7v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(x,0) = g(x) & 0 \le x \le \pi \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Quindi, tenendo conto dello sviluppo ottenuto nell'esercizio precedente, la soluzione del problema in u è:

$$u(x,t) = u_{\mathrm{s}}(x) + v(x,t) = x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(3\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} + 4\frac{\cos\frac{k\pi}{2} - 1}{k^3\pi} \right) e^{-7k^2 t} \sin kx.$$

Si ha poi $\sup_{x\in[0,\pi]}|g(x)| = \frac{\pi^2}{4}$ e quindi $|u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)| \le \pi^2 e^{-7t}$ per $t > \frac{\pi^2}{7}$. Alternativamente, posto $H = \sum_{k=1}^{\infty} \left| 3\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} + 4\frac{\cos\frac{k\pi}{2}-1}{k^3\pi} \right|$ si ha: $|u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)| \le He^{-7t}$ per $t \ge 0$.

ESERCIZIO 4

Dopo aver disegnato le caratteristiche, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + (2u-5)u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{per} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{per} \quad x > 2. \end{cases}$$

SOLUZIONE

Le caratteristiche sono:

- $x = x_0 - 7t$ per $x_0 < 0$;
- $x = x_0 + (2x_0 - 7)t$ per $0 \le x_0 \le 2$;
- $x = x_0 - 3t$ per $x_0 > 2$.

Per $-7t \le x \le 2 - 3t$ la soluzione in forma implicita è: $u = [x - (2u-5)t] - 1$, che esplicitata diventa: $u(x,t) = \frac{x+5t-1}{2t+1}$. Quindi la soluzione del problema è:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per} \quad x < -7t \\ \frac{x+5t-1}{2t+1} & \text{per} \quad -7t \le x \le 2-3t \\ 1 & \text{per} \quad x > 2-3t. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5

Determinare una funzione $g(y)$ definita in $[0,1]$ in modo tale che la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 2\pi, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 1, u(x,1) = e^{x+1} & 0 \le x \le 2\pi, \\ u(0,y) = 1 + (e-1)y, u(2\pi,y) = g(y) & 0 \le y \le 1, \end{cases}$$

verifichi la condizione $u(x,y) \ge e^y \cos x$, per $(x,y) \in [0,2\pi] \times [0,1]$.

SOLUZIONE
Notiamo anzitutto che $e^y \cos x$ è armonica. Se si prende $g(y) = e^{(2\pi+1)y}$ sono sodisfatte le condizioni di raccordo:

$$\begin{aligned} 1 + (e-1)y|_{y=0} &= 1 = u(x,0) & \qquad e^{(2\pi+1)y}|_{y=0} &= 1 = u(x,0) \\ e^{x+1}|_{x=0} &= e = 1 + (e-1)y|_{y=1} & \qquad e^{(2\pi+1)y}|_{y=1} &= e^{2\pi+1} = e^{x+1}|_{x=2\pi}. \end{aligned}$$

Inoltre si ha:

- $1 + (e-1)y \geq e^y = e^y \cos x|_{x=0}$ per $y \in [0,1]$, perché $s = 1 + (e-1)y$ è la corda di $s = e^y$ in $[0,1]$ ed $s = e^y$ è convessa;
- $1 \geq \cos x = e^y \cos x|_{y=0}$ per $0 \leq x \leq 2\pi$;
- $e^{(2\pi+1)y} \geq e^y = e^y \cos x|_{x=2\pi}$ per $y \in [0,1]$;
- $e^{x+1} \geq e \cos x = e^y \cos x|_{y=1}$ per $0 \leq x \leq 2\pi$.

  Si ha quindi $u(x,y) \geq e^y \cos y$ sulla frontiera del rettangolo $[0, 2\pi] \times [0,1]$ e quindi, per il principio del massimo, in tutto il quadrato stesso.