INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 20-09-2012 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare l'area della supeficie che si ottiene ruotando la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y^2 = 4x + 4$, $0 \le x \le 3$, attorno all'asse x. E' richiesto il disegno della curva e della superficie.

SOLUZIONE
Ad $x = 0$ corrisponde $y = 2$ mentre ad $x = 3$ corrisponde $y = 4$. Quindi, si può parametrizzare la curva nella forma

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^2 - 1, \\ y = t, \end{cases} \qquad 2 \le t \le 4.$$

L'area dunque vale:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\mathcal{C}} y ds =& 2\pi \int_2^4 t\sqrt{1 + \frac{1}{4}t^2} dt = 2\pi \left[\frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{4}t^2 \right)^{3/2} \right]_2^4 \\ =& \frac{8}{3}\pi \left[5^{3/2} - 2^{3/2} \right]. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π-periodica f che in $[-\pi, \pi]$ vale:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x| & \text{per } 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ \\ 0 & \text{per } \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza dello sviluppo ottenuto e disegnare il grafico della funzione periodica.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che la funzione è pari e continua in $[-\pi, \pi]$ e quindi lo sviluppo convergerà totalmente. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

e per $k \ge 1$

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos kx dx \\ =& \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \frac{\sin kx}{k} - x\frac{\sin kx}{k} - \frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi/2} \\ =& \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{\cos \frac{k\pi}{2}}{k^2} \right] \equiv \begin{cases} \frac{2}{k^2\pi} & \text{per } k \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } k = 4m, m \in \mathbb{N}, \\ \frac{4}{k^2\pi} & \text{per } k = 4m + 2, m \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \left[1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right] \cos kx$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, con convergenza totale.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \\ 0 & \text{per } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore in dimensione 1. I coefficienti a_k coincidono con quelli dell'esercizio precedente e quindi

$$u(x,t) = \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \left[1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right] e^{-2k^2 t} \cos kx$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u = 2xy & x^2 + y^2 = 1, \\ u = \frac{xy}{8} - \log 2 & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un anello. Si ha:

$$[2xy]_{x=\cos\theta, y=\sin\theta} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$
$$\left[\frac{xy}{8} - \log 2\right]_{x=2\cos\theta, y=2\sin\theta} = \frac{1}{4}\sin 2\theta - \log 2.$$

Quindi in coordinate polari il problema diventa:

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, 0 \le \theta \le 2\pi, \\ U(1,\theta) = \sin 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ U(2,\theta) = \frac{1}{4}\sin 2\theta - \log 2 & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Cercando la soluzione nella forma

$$U(r,\theta) = C_1 + C_2 \log r + \left(C_3 r^2 + C_4 \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

troviamo che deve essere

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 \log 2 = -\log 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ 4C_3 + \frac{1}{4}C_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

e quindi $C_1 = 0, C_2 = -1, C_3 = 0, C_4 = 1$. In conclusione,

$$U(r,\theta) = -\log r + \frac{1}{r^2}\sin 2\theta$$

e tornando in coordinate cartesiane

$$-\log r + \frac{1}{r^2}\sin 2\theta = -\log\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Verifica. Si ha:

$$\left[-\log\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right]_{x^2+y^2=1} = 2xy,$$

$$\left[-\log\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right]_{x^2+y^2=4} = \frac{xy}{8} - \log 2$$

e poi

$$u_x = -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2+y^2)^3},$$

$$u_{xx} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{24x^3y - 24xy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

e in modo simile (scambiando x con y)

$$u_{yy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{24xy^3 - 24x^3y}{(x^2+y^2)^3}$$

e quindi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + (t-x)u_x + 1 = 0 & x \in \mathbb{R} t > 0, \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti variabili. Le curve caratteristiche si ottengono risolvendo il problema:

$$\begin{cases} x' + x = t \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine la cui soluzione generale è:

$$x = e^{-t}\left[x_0 + \int_0^t e^s s ds\right] = e^{-t}\{x_0 + [se^s - e^s]_0^t\} = x_0 e^{-t} + t - 1 + e^{-t}$$

Quindi

$$\varphi(x_0, t) = x_0 e^{-t} + t - 1 + e^{-t} \qquad \text{e} \qquad \psi(x,t) = xe^t - te^t + e^t - 1.$$

Sulle caratteristiche l'equazione diventa:

$$\begin{cases} U' + 1 = 0 \\ U(0) = x_0^2. \end{cases}$$

La soluzione generale è: $U = -t + C$. Imponendo la condizione iniziale si trova $C = x_0^2$ e quindi

$$u(x,t) = [-t + x_0^2]_{x_0 = xe^t - te^t + e^t - 1} = -t + (xe^t - te^t + e^t - 1)^2.$$

<u>Verifica</u>. Si ha $u(x,0) = x^2$ e poi

$$u_t + (t-x)u_x + 1 = -1 + 2(xe^t - te^t + e^t - 1)(xe^t - te^t) + 2(t-x)(xe^t - te^t + e^t - 1)e^t + 1 = 0.$$