INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 17-06-2013

ESERCIZIO 1
Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove V l'intersezione dei solidi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $x^2 + y^2 \leq 1$ ed $\vec{F} = (x^3 z, y^3 z, z^2)$.

SOLUZIONE
Si ha div$\vec{F} = 3x^2 z + 3y^2 z + 2z$ e quindi, usando le coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma =& 2 \iiint_V (3x^2 z + 3y^2 z + 2z) dx dy dz \\
=& \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} (3\rho^2 + 2) z \rho dz d\rho d\theta \\
=& 2\pi \int_0^1 (3\rho^3 + 2\rho) \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=-\sqrt{4-\rho^2}}^{z=\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Tale risultato si poteva anche dedurre osservando che la funzione integranda è dispari rispetto al piano $z = 0$.

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi/4, \\ 0 & \pi/4 < x < \pi/2, \\ -1 & \pi/2 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta. E' richiesto anche il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} x dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (-1) dx = \frac{\pi}{16} - 1$$

e poi, per $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} x \cos kx dx - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos kx dx \\
=& \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi/4} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\
=& \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{2k} + \frac{2 \cos \frac{k\pi}{4}}{k^2 \pi} - \frac{2}{k^2 \pi} + \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\pi}{32} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{2k} + \frac{2\cos \frac{k\pi}{4}}{k^2\pi} - \frac{2}{k^2\pi} + \frac{2\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi} \right] \sin kx$$
$$= \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi,\ x \neq \pi/4, \pi/2 \\ \pi/8 & x = \pi/4 \\ -1/2 & x = \pi/2. \end{cases}$$

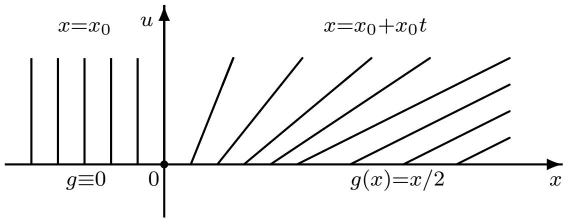
ESERCIZIO 3
Dopo aver disegnato le relative caratteristiche, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t + 2uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0 \\ x/2 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

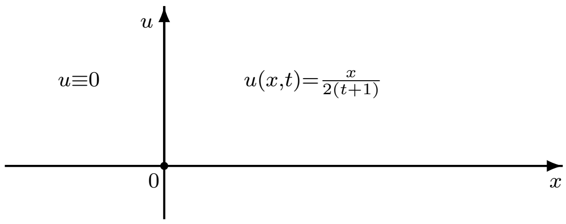
Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE

Le caratteristiche sono le rette $x = x_0$ e per $x_0 < 0$ e le rette $x = x_0 + x_0 t$ per $x_0 > 0$ (poiché $q'[g(x_0)] = 2 \cdot \frac{1}{2} x_0 = x_0$ per $x_0 > 0$).



Per $x < 0$ la soluzione è $u \equiv 0$.
Per $x \ge 0$ la soluzione in forma implicita è $u = \frac{1}{2}[x - 2ut]$, che esplicitata da $u(x,t) = \frac{x}{2(t+1)}$.



<u>Verifica</u>: per $x \ge 0$ si ha $u(x,0) = \frac{x}{2}$ e poi

$$u_t + 2uu_x = -\frac{x}{2(t+1)^2} + 2 \cdot \frac{x}{2(t+1)} \cdot \frac{1}{2(t+1)} = 0.$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^x \sin^2 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} e^{x+2s\sqrt{t}} \sin^2(x+2s\sqrt{t})ds \\
=& \frac{e^{x+t}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-\sqrt{t})^2} \frac{1-\cos(2x+4s\sqrt{t})}{2} ds \\
=& \frac{e^{x+t}}{2} - \frac{e^{x+t}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-\sqrt{t})^2} \cos[2(x+2t)+4(s-\sqrt{t})\sqrt{t}]ds \\
=& \frac{e^{x+t}}{2} - \cos(2x+4t)\frac{e^{x+t}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-\sqrt{t})^2} \cos[4(s-\sqrt{t})\sqrt{t}]ds \\
(r = s-\sqrt{t}) \qquad =& e^{x+t} - \cos(2x+4t)\frac{e^{x+t}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \cos(4r\sqrt{t})dr \\
=& \frac{e^{x+t}}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x+4t)e^{x-3t}.
\end{aligned}
$$

Verifica:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^x\cos 2x = e^x \sin^2 x$$

e poi

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} = &\left[\frac{e^{x+t}}{2} + 2\sin(2x+4t)e^{x-3t} + \frac{3}{2}\cos(2x+4t)e^{x-3t}\right] \\
&- \left[\frac{e^{x+t}}{2} + 2\sin(2x+4t)e^{x-3t} + \frac{3}{2}\cos(2x+4t)e^{x-3t}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & 1 < x^2+y^2 < 4, \\
u = 2y + 2xy & x^2+y^2 = 1, \\
u = \frac{y}{2} + 2xy & x^2+y^2 = 4.
\end{cases}
$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un anello. Si ha:

$$
\begin{aligned}
&[2y+2xy]_{x=\cos\theta, y=\sin\theta} = 2\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta + \sin 2\theta \\
&\left[\frac{y}{2} + 2xy\right]_{x=2\cos\theta, y=2\sin\theta} = \sin\theta + 4\sin 2\theta.
\end{aligned}
$$

Quindi in coordinate polari il problema diventa:

$$
\begin{cases}
U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, 0 \le \theta \le 2\pi, \\
U(1,\theta) = 2\sin\theta + \sin 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi, \\
U(2,\theta) = \sin\theta + 4\sin 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi.
\end{cases}
$$

Cercando la soluzione nella forma

$$U(r,\theta) = \left(C_1 r + C_2 \frac{1}{r}\right) \sin\theta + \left(C_3 r^2 + C_4 \frac{1}{r^2}\right) \sin 2\theta$$

troviamo che deve essere

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ 4C_3 + \frac{1}{4}C_4 = 4 \end{cases}$$

e quindi $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = 1, C_4 = 0$. In conclusione,

$$U(r,\theta) = \frac{2}{r} \sin\theta + r^2 \sin 2\theta$$

e tornando in coordinate cartesiane troviamo

$$\frac{2}{r} \sin\theta + r^2 \sin 2\theta = \frac{2r \sin\theta}{r^2} + 2r \sin\theta r \cos\theta = \frac{2y}{x^2+y^2} + 2xy.$$

Verifica. Si ha:

$$\left[\frac{2y}{x^2+y^2} + 2xy\right]_{x^2+y^2=1} = 2y + 2xy,$$

$$\left[\frac{2y}{x^2+y^2} + 2xy\right]_{x^2+y^2=4} = \frac{y}{2} + 2xy$$

e poi

$$u_x = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} + 2y, \qquad u_{xx} = \frac{12x^2y - 4y^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$u_y = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x, \qquad u_{yy} = \frac{4y^3 - 12x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

e quindi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.