INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 17-07-2013 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Usando il teorema di Stokes, calcolare il seguente integrale:

$$\oint_{+\partial T} \vec{F} \cdot \vec{v} dt,$$

dove T é il triangolo di vertici $(-1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, il verso positivo di $+\partial T$ è quello che dall'alto risulta antiorario ed $\vec{F} = (yz^2, x^2z, x^2y^2)$.

SOLUZIONE
Applicando il teorema di Stokes troviamo:

$$\oint_{+\partial T} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{+T} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Si ha:

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & x^2z & x^2y^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2x^2y - x^2) + \mathbf{j}(2yz - 2xy^2) + \mathbf{k}(2xz - z^2) \equiv (2x^2y - x^2, 2yz - 2xy^2, 2xz - z^2).$$

Per quanto riguarda T, esso giace sul piano passante per i tre vertici, che ha equazione $y + z - 1 = 0$, e si proietta sul piano xy nel triangolo $T_0 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -1 + y \leq x \leq 1 - y\}$. Quindi, usando la parametrizzazione $z = 1 - y$, $(x, y) \in T_0$, si ha:

$$\vec{n} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}, \qquad d\sigma = \sqrt{2} dxdy$$

da cui segue che (sfruttando anche la simmetria di T_0 rispetto all'asse y per abbreviare i calcoli):

$$\begin{aligned}
\int_{+T} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{T_0} [(2yz - 2xy^2) + (2xz - z^2)]_{z=1-y} dxdy \\
&= \iint_{T_0} \{[2y(1 - y) - 2xy^2] + [2x(1 - y) - (1 - y)^2]\} dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_{-1+y}^{1-y} (-2xy^2 - 2xy - 3y^2 + 4y + 2x - 1) dx \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[-3xy^2 + 4yx - x \right]_{x=-1+y}^{x=1-y} dy \\
&= \int_0^1 (6y^3 - 14y^2 + 10y - 2) dy = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2} & \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

esaminando la convergenza dello sviluppo ottenuto. E' richiesto anche il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

Osserviamo che g è continua in $[0, \pi]$:

$$x^2|_{x=\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} = \left(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2}\right)\Big|_{x=\pi/2}$$

e quindi avremo convergenza totale. Si ha poi:

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2}\right) dx \\ =& \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{2}x\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ =& \frac{5}{24}\pi^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2}\right) \cos kx dx \\ =& \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin kx}{k} + 2x\frac{\cos kx}{k^2} - 2\frac{\sin kx}{k^3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\pi}{2}\frac{\sin kx}{k} - \frac{\pi}{2}\frac{\cos kx}{k^2} + \frac{\pi^2}{2}\frac{\sin kx}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ =& \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k} + \pi\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k^2} - 2\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^3}\right] \\ &+ \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\cos k\pi}{k^2} + \frac{\pi^2}{4}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k^2} - \frac{\pi^2}{2}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k}\right] \\ =& \frac{3\cos\frac{k\pi}{2} - (-1)^k}{k^2} - 4\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^3\pi}. \end{aligned}$$

Quindi si ha, per ogni $x \in [0, \pi]$:

$$g(x) = \frac{5}{48}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3\cos\frac{k\pi}{2} - (-1)^k}{k^2} - 4\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^3\pi}\right)\cos kx,$$

con convergenza totale.

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove g é la funzione dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore in dimensione 1. I coefficienti a_k coincidono con quelli dell'esercizio precedente e quindi

$$u(x,t) = \frac{5}{48}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3\cos\frac{k\pi}{2} - (-1)^k}{k^2} - 4\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^3\pi} \right) e^{-2k^2 t} \cos kx$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = xy^2z^2 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = x^2 z & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 3. Le medie sferiche dei dati iniziali valgono:

$$
\begin{aligned}
M_g(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x+r\sin\theta\cos\varphi)(y+r\sin\theta\sin\varphi)^2(z+r\cos\theta)^2\sin\theta d\theta d\varphi \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}(xy^2+xr^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)d\varphi\right](z+r\cos\theta)^2\sin\theta d\theta \\
=& \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(2xy^2+xr^2\sin^2\theta)(z+r\cos\theta)^2\sin\theta d\theta \\
=& \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(2xy^2z^2+4xy^2zr\cos\theta+2xy^2r^2\cos^2\theta+xz^2r^2\sin^2\theta \\
& \quad + 2xzr^3\sin^2\theta\cos\theta+xr^4\sin^2\theta\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \\
=& \frac{1}{4}\Bigg[-2xy^2z^2\cos\theta-\frac{2}{3}xy^2r^2\cos^3\theta-xz^2r^2\cos\theta+\frac{1}{3}xz^2r^2\cos^3\theta \\
& \quad \left. -\frac{1}{3}xr^4\cos^3\theta+\frac{1}{5}xr^4\cos^5\theta\Bigg]\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
=& xy^2z^2+\frac{1}{3}xy^2r^2+\frac{1}{2}xz^2r^2-\frac{1}{6}xz^2r^2+\frac{1}{6}xr^4-\frac{1}{10}xr^4 \\
=& xy^2z^2+\frac{1}{3}xy^2r^2+\frac{1}{3}xz^2r^2+\frac{1}{15}xr^4,
\end{aligned}
$$

e in modo analogo

$$
\begin{aligned}
M_g(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x+r\sin\theta\cos\varphi)^2(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}(x^2+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)d\varphi\right](z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
=& \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(2x^2+r^2\sin^2\theta)(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
=& \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(2x^2z+2x^2r\cos\theta+zr^2\sin^2\theta+r^3\sin^2\theta\cos\theta)\sin\theta d\theta \\
=& \frac{1}{4}\left[-2x^2z\cos\theta-x^2r\cos^2\theta-zr^2\cos\theta+\frac{1}{3}zr^2\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
=& x^2z+\frac{1}{2}zr^2-\frac{1}{6}zr^2 \\
=& x^2z+\frac{1}{3}zr^2.
\end{aligned}
$$

Quindi, applicando la formula di Kirchhoff, si trova:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) =& \frac{\partial}{\partial t}\left[t\left(xy^2z^2+\frac{1}{3}xy^2t^2+\frac{1}{3}xz^2t^2+\frac{1}{15}xt^4\right)\right]+t\left(x^2z+\frac{1}{3}zt^2\right) \\
=& xy^2z^2+xy^2t^2+xz^2t^2+\frac{1}{3}xt^4+x^2zt+\frac{1}{3}zt^3.
\end{aligned}
$$

Verifica:

$$u(x,y,z,0) = x^2yz^2, \qquad u_t(x,y,z,0) = \left(2xy^2t + 2xz^2t + \frac{4}{3}xt^3 + x^2z + zt^2\right)|_{t=0} = x^2z,$$

$$u_{tt} - \Delta u = (2xy^2 + 2xz^2 + 4xt^2 + 2zt) - [2zt + (2xz^2 + 2xt^2) + (2xy^2 + 2xt^2)] = 0.$$

ESERCIZIO 5
Detta u la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, 0 < y < 4, \\ u(x,0) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & 0 \le x \le \pi, \\ u(x,4) = -\frac{e^2}{2\pi}x^2 + \frac{\pi}{2}e^2 & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,y) = \frac{\pi}{2}e^{y/2} & 0 \le y \le 4, \\ u(\pi,y) = 0 & 0 \le y \le 4, \end{cases}$$

dimostrare che si ha $u(x,y) \ge e^{y/2}\cos\frac{x}{2}$ per ogni $(x,y) \in [0,\pi] \times [0,4]$.

SOLUZIONE
Notiamo anzitutto che la funzione $e^{y/2}\cos\frac{x}{2}$ è armonica. Quindi, per risolvere il problema, basta studiare i valori di u sulla frontiera del rettangolo $[0,\pi] \times [0,4]$ e confrontarli con quelli di $e^{y/2}\cos\frac{x}{2}$. Esaminiamo il raccordo dei dati al bordo: si ha

$$\left[\frac{\pi}{2}e^{y/2}\right]_{y=0} = \frac{\pi}{2} = \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right]_{x=0}, \qquad \left[\frac{\pi}{2}e^{y/2}\right]_{y=4} = \frac{\pi}{2}e^2 = \left[-\frac{e^2}{2\pi}x^2 + \frac{\pi}{2}e^2\right]_{x=0},$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right]_{x=\pi} = 0, \qquad \left[-\frac{e^2}{2\pi}x^2 + \frac{\pi}{2}e^2\right]_{x=\pi} = 0,$$

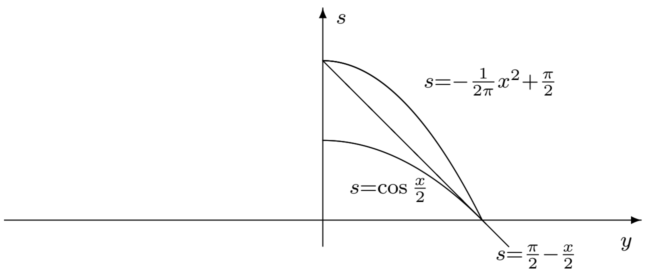
e quindi u è continua in tutto il rettangolo chiuso. Confrontiamo prima i dati sui lati paralleli all'asse x. Si ha

$$\left[e^{y/2}\cos\frac{x}{2}\right]_{y=0} = \cos\frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = u(x,0) \qquad \text{per} \quad 0 \le x \le \pi$$

perché $s = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ è la tangente in $x = \pi$ alla funzione $s = \cos\frac{x}{2}$, che è concava in $[0,\pi]$. Si ha anche

$$\left[e^{y/2}\cos\frac{x}{2}\right]_{y=4} = e^2\cos\frac{x}{2} \le -\frac{e^2}{2\pi}x^2 + \frac{\pi}{2}e^2 = u(x,4) \qquad \text{per} \quad 0 \le x \le \pi$$

perché in $[0,\pi]$ la retta $s = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ è una corda della funzione concava $s = -\frac{1}{2\pi}x^2 + \frac{\pi}{2}$ e quindi $\cos\frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \le -\frac{1}{2\pi}x^2 + \frac{\pi}{2}$.



Sui lati paealeli all'asse y si ha:

$$\left[e^{y/2}\cos\frac{x}{2}\right]_{x=0} = e^{y/2} \leq \frac{\pi}{2}e^{y/2} = u(0,y), \qquad \left[e^{y/2}\cos\frac{x}{2}\right]_{x=\pi} = 0 = u(\pi,0) \quad \text{per } 0 \leq y \leq 4.$$

Da queste maggiorazioni deduciamo che $e^{y/2}\cos\frac{x}{2} \leq u(x,y)$ sulla frontiera del rettangolo ed essendo queste entrambe funzioni armoniche, il principio del massimo ci permette di estendere la disuguaglianza a tutto il rettangolo.