INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 16-07-2014

ESERCIZIO 1
Calcolare $\int\limits_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove $\vec{F} = (x^3, y^3, z^2)$ e V è il solido racchiuso dalle superfici $z + x = 1$, $z + x = 2$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUZIONE
In coordinate cilindriche il dominio si scrive nella forma:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \\ 1 - \rho\cos\theta \leq z \leq 2 - \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Inoltre: $\text{div}\vec{F} = 3(x^2 + y^2) + 2z$. Quindi, applicando il teorema della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V \text{div}\vec{F} dxdydz = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 2z) dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{1-\rho\cos\theta}^{2-\rho\cos\theta} (3\rho^2 + 2z)\rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[3\rho^2 z + z^2\right]_{z=1-\rho\cos\theta}^{z=2-\rho\cos\theta} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3\rho^3 + 3\rho - 2\rho^2\cos\theta) d\rho d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{4}\rho^4 + \frac{3}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=2} \\ &= 36\pi. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3\pi - 3x & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta e disegnando il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
Osserviamo che la funzione g è continua in $[0, \pi]$:

$$3x|_{x=\pi/2} = \frac{3\pi}{2} = (3\pi - 3x)|_{x=\pi/2}.$$

Inoltre la derivata prima è continua a tratti e valgono le condizioni di compatibilità: $g(0) = 0 = g(\pi)$. Quindi avremo convergenza totale. Si ha poi:

$$
\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (3\pi - 3x) \sin kx dx \\
=& \frac{2}{\pi} \left[-3x \frac{\cos kx}{k} + 3 \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} \left[-3\pi \frac{\cos kx}{k} + 3x \frac{\cos kx}{k} - 3 \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\
=& \frac{12 \sin \frac{k\pi}{2}}{\pi k^2} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ \frac{12(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} & \text{per } k = 2m+1 \text{ dispari.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Quindi si ha, per ogni $x \in [0, \pi]$:

$$
g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12 \sin \frac{k\pi}{2}}{\pi k^2} \sin kx \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{12(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} \sin(2m+1)x
$$

con convergenza totale.

ESERCIZIO 3

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria $u_{\mathrm{s}}(x)$, risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = -12x, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) + x^3 & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = \pi^3 & t > 0, \end{cases}
$$

dove $g(x)$ è come nell'esercizio precedente. Dare anche una stima della velocità di convergenza di u ad u_{s}.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Dirichlet non omogeneo per l'equazione del calore non omogenea. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} -2u_{\mathrm{s}}'' = -12x, \ 0 < x < \pi \\ u_{\mathrm{s}}(0) = 0, u_{\mathrm{s}}(\pi) = \pi^3. \end{cases}$ La soluzione generale è $u_{\mathrm{s}}(x) = x^3 + C_1 x + C_2$ e imponendo le condizioni al contorno si trova: $C_2 = 0$, $\pi^3 + C_1\pi + C_2 = \pi^3$, da cui ricaviamo $C_1 = 0$ e $u_{\mathrm{s}}(x) = x^3$. Inoltre, ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)$, la funzione v deve risolvere il seguente problema di Dirichlet omogeneo

$$
\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(x,0) = g(x) & 0 \le x \le \pi \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}
$$

Quindi, tenendo conto dello sviluppo ottenuto nell'esercizio precedente, la soluzione del problema in u è:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& u_{\mathrm{s}}(x) + v(x,t) = x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12 \sin \frac{k\pi}{2}}{\pi k^2} e^{-2k^2 t} \sin kx \\
\equiv& x^3 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{12(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} e^{-2(2m+1)^2 t} \sin(2m+1)x.
\end{aligned}
$$

Si ha poi $\sup_{x\in[0,\pi]}|g(x)| = \frac{3\pi}{2}$ e quindi $|u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)| \le 6\pi e^{-2t}$ per $t \ge \frac{\pi^2}{2}$.

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} = 6x^5 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}.
\end{cases}
$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 1. Applicando la formula di D'Alembert, troviamo

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_{x-t+s}^{x+t-s} 6y^5 dy \right] ds = \frac{1}{2} \int_0^t \left[y^6 \right]_{y=x-t+s}^{y=x+t-s} ds \\
=& \frac{1}{2} \int_0^t \left[(x+t-s)^6 - (x-t+s)^6 \right] ds \\
=& \frac{1}{14} \left[-(x+t-s)^7 - (x-t+s)^7 \right]_{s=0}^{s=t} \\
=& \frac{(x+t)^7 + (x-t)^7}{14} - \frac{x^7}{7} \\
=& 3x^5 t^2 + 5x^3 t^4 + x t^6.
\end{aligned}
$$

Verifica: $u(x,0) = 0$, $u_t = 6x^5 t + 20x^3 t^3 + 6x t^5$ e $u_t(x,0) = 0$. Infine:

$$
u_{tt} - u_{xx} = [6x^5 + 60x^3 t^2 + 30x t^4] - [60x^3 t^2 + 30x t^4] = 6x^5.
$$

ESERCIZIO 5

Detta u la soluzione del problema

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\
u(x,0) = 0, u(x,1) = x^2 \log 2 & 0 \le x \le 1 \\
u(0,y) = 0, u(1,y) = \log(1+y^3) & 0 \le y \le 1
\end{cases}
$$

dimostrare che si ha $u(x,y) \le xy$ per ogni $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.

SOLUZIONE

Notiamo anzitutto che la funzione xy è armonica. Quindi, per risolvere il problema, basta studiare i valori di u sulla frontiera del rettangolo $[0,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e confrontarli con quelli di xy. Esaminiamo il raccordo dei dati al bordo: si ha

$$[x^2 \log 2]_{x=0} = 0, \qquad \log(1+y^3)|_{y=0} = 0,$$
$$[x^2 \log 2]_{x=1} = \log 2 = \log(1+y^3)|_{y=1},$$

e quindi u è continua in tutto il rettangolo chiuso. Su entrambi gli assi cartesiani u ed xy sono nulle e quindi uguali. Si ha poi:

$$u(1,y) = \log(1+y^3) \le y^3 \le y = [xy]_{x=1} \qquad \text{per} \quad 0 \le y \le 1$$

e

$$u(x,1) = x^2 \log 2 \le x = [xy]_{y=1} \qquad \text{per} \quad 0 \le x \le 1.$$

Da queste maggiorazioni deduciamo che $u(x,y) \le xy$ sulla frontiera del rettangolo ed essendo queste entrambe funzioni armoniche, il principio del massimo ci permette di estendere la disuguaglianza a tutto il rettangolo.