ANALISI MATEMATICA I - II modulo
Ingegneria Informatica - canale I
Ingegneria Automatica
Compito del 11-07-2008

COMPITO I

ESERCIZIO 1
Studiare la continuità nel punto $(0,0)$, l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$ e la differenziabilitá in tale punto della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(suggerimento: usare $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$).

SOLUZIONE
Applicando la disuguaglianza suggerita, si trova:

$$\left| \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq |x| \frac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)^2} = \frac{|x|}{4} \to 0 \quad \text{per} \quad (x,y) \to (0,0),$$

e quindi f è continua in $(0,0)$. E' derivabile perché è identicamente nulla su entrambi gli assi cartesiani, e quindi $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Infine, usando le coordinate polari troviamo che

$$\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho^5 \cos^3\theta \sin^2\theta}{\rho^5} = \cos^3\theta \sin^2\theta$$

non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$, e quindi f non é differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 2
Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' + 2y' - 15y = 0$$

e individuare tutte le soluzioni che soddisfano la condizione $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

SOLUZIONE
L'equazione è lineare del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è: $\alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0$, le cui soluzioni sono $3, -5$. Quindi l'integrale generale è: $y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{3x}$. Le soluzioni che verificano $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ sono date da $y(x) = C_2e^{3x}$.

ESERCIZIO 3

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_C y dx dy,$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

SOLUZIONE
La parabola $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ è tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nel punto $(0,1)$. Il dominio è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione é pari, e quindi l'integrale vale

$$\begin{aligned}
\iint_C y dx dy &= 2\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y}} y dx \right) dy \\
&= 2\int_0^1 (2y\sqrt{1-y} - y\sqrt{1-y^2}) dy \\
&= 2\left[\frac{4}{5}(1-y)^{5/2} - \frac{4}{3}(1-y^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 \\
&= 2\left[-\frac{4}{5} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \right] \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

L'integrale $\int y\sqrt{1-y} dy$ si calcola immediatamente con la sostituzione $t = \sqrt{1-y}$.

Alternativamente, si pu calcolare l'integrale doppio scrivendo il dominio come differenza:

$$\begin{aligned}
\iint_C y dx dy &= \int_{-2}^2 \int_0^{-\frac{1}{4}x^2+1} y dy dx - \int_0^1 \int_0^\pi \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx - \frac{1}{3}[-\cos\theta]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x \right]_{-2}^2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

COMPITO II

ESERCIZIO 1
Studiare la continuità nel punto $(0,0)$, l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$ e la differenziabilitá in tale punto della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(suggerimento: usare $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$).

SOLUZIONE
Applicando la disuguaglianza suggerita, si trova:

$$\left| \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq |y| \frac{(x^2+y^2)^3}{8(x^2+y^2)^2} = \frac{|y|}{4}(x^2+y^2) \to 0 \quad \text{per} \quad (x,y) \to (0,0),$$

e quindi f è continua in $(0,0)$. E' derivabile perché è identicamente nulla su entrambi gli assi cartesiani, e quindi $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Infine, usando nuovamente la disuguaglianza suggerita, troviamo

$$\left| \frac{x^3y^4}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |y| \frac{(x^2+y^2)^3}{8(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{|y|}{8}\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{per} \quad (x,y) \to (0,0),$$

e quindi f é differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 2
Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' + 2y' - 24y = 0$$

e individuare tutte le soluzioni che soddisfano la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

SOLUZIONE
L'equazione è lineare del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è: $\alpha^2 + 2\alpha - 24 = 0$, le cui soluzioni sono $-6, 4$. Quindi l'integrale generale è: $y(x) = C_1e^{-6x} + C_2e^{4x}$. Le soluzioni che verificano $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ sono date da $y(x) = C_1e^{-6x}$.

ESERCIZIO 3
Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_C y\,dxdy,$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq -\frac{1}{9}y^2 + 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

SOLUZIONE

La parabola $x = -\frac{1}{9}y^2 + 1$ è tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nel punto $(1, 0)$. Il dominio è simmetrico rispetto all'asse x e la funzione é pari, e quindi l'integrale vale

$$\begin{aligned}
\iint_C x dx dy &= 2\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{3\sqrt{1-x}} x dy \right) dx \\
&= 2\int_0^1 (3x\sqrt{1-x} - x\sqrt{1-x^2}) dx \\
&= 2\left[\frac{6}{5}(1-x)^{5/2} - 2(1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 \\
&= 2\left[-\frac{6}{5} + 2 - \frac{1}{3} \right] \\
&= \frac{14}{5}.
\end{aligned}$$

L'integrale $\int x\sqrt{1-x} dx$ si calcola immediatamente con la sostituzione $t = \sqrt{1-x}$.

Come nell'altro compito, l'integrale può essere anche calcolato scrivendo il dominio come differenza di insiemi.