ANALISI MATEMATICA I - II modulo
Ingegneria Informatica - canale I
Ingegneria Automatica
Compito del 12-01-2009

ESERCIZIO 1
Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^2+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$ e se è differenziabile in $(0,0)$.

SOLUZIONE
La funzione è certamente continua fuori di $(0,0)$. Passando in coordinate polari, troviamo

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \frac{|\rho^5\cos^4\theta\sin\theta|}{\rho^2\cos^2\theta + \rho|\sin\theta|} \leq \frac{|\rho^5\cos^4\theta\sin\theta|}{|\rho\sin\theta|} = \rho^4\cos^4\theta \leq \rho^4 \to 0$$

per $\rho \to 0$, e quindi è continua anche in $(0,0)$. Si ha poi

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} \to 0 \quad \text{per} \quad h \to 0$$

e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Possiamo quindi esaminare la differenziabilità:

$$\left|\frac{x^4 y}{(x^2+|y|)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|\rho^5\cos^4\theta\sin\theta|}{(\rho^2\cos^2\theta + \rho|\sin\theta|)\rho} \leq \frac{|\rho^5\cos^4\theta\sin\theta|}{|\rho^2\sin\theta|} = \rho^3\cos^4\theta \leq \rho^3 \to 0$$

e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 2
Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \log x \\ y(1) = \lambda. \end{cases}$$

SOLUZIONE
Separando le variabili, troviamo $\int \frac{dy}{y^2} = \int \log x dx$, che integrata dà: $-\frac{1}{y} = x\log x - x + C$, e quindi l'integrale generale

$$y = \frac{1}{x - x\log x - C}.$$

Imponendo la condizione iniziale, troviamo $-\frac{1}{\lambda} = -1+C$, cioè $C = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Sostituendo quest'ultima espressione nell'integrale generale troviamo infine:

$$y = \frac{\lambda}{\lambda x - \lambda x \log x - \lambda + 1}.$$

Va osservato che l'integrale generale con la costante C esclude la soluzione costante $y \equiv 0$, mentre quello espresso in termini della costante λ lo contiene per il valore $\lambda = 0$.

ESERCIZIO 3
Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{x \sin \sqrt{x}}{1 - \cos^2 x} dx; \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\log(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} dx.$$

SOLUZIONE
Per il primo integrale possiamo usare le stime asintotiche $\sin \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ e $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ (oppure $1 - \cos^2 x = \sin^2 x \sim x^2$) per $x \to 0$, ottenendo

$$\frac{x \sin \sqrt{x}}{1 - \cos^2 x} = \frac{x \sin \sqrt{x}}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \sim \frac{x^{3/2}}{2 \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

per $x \to 0^+$, e quindi l'integrale converge (per il confronto con $\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

In modo analogo,

$$\frac{e^{1/x} - 1}{\log(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} \sim \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e quindi il secondo integrale diverge (confronto con $\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).