COMPITO – 11-09-2007

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) Dalla stima asintotica $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, otteniamo subito:

$$\sqrt{x \sin \frac{1}{x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty,$$

e quindi l'integrale non converge.

b) Usando la stima $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$, si trova subito:

$$\sqrt{\frac{x}{e^{x^2} - 1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{per} \quad x \to 0^+$$

e quindi l'integrale converge.

ESERCIZIO 2.

L'equazione è lineare, del secondo ordine, non omogenea e a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è: $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$, le cui soluzioni sono: $1+i, 1-i$. Dato che x non è tra le soluzioni dell'omogenea associata, possiamo cercare una soluzione particolare della forma: $y_0(x) = ax + b$. Dato che $y_0' = a$ e $y_0'' \equiv 0$, deve essere $0 - 2a + 2ax + 2b = x$, e quindi

$$\begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ 2a = 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale sistema è: $a = \frac{1}{2} = b$. Quindi la soluzione generale dell'equazione è:

$$y = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 3

La funzione è definita quando il radicando è strettamente positivo: $x^2 - x - 2 > 0$. Le radici del polinomio $x^2 - x - 2$ sono -1 e 2, e quindi l'insieme di esistenza è: $\{x : x > 2\} \cup \{x : x < -1\}$. In -1 e 2 il numeratore non si annulla, anzi è positivo in entrambi i casi, e quindi si ha:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{6}{+0} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{3}{+0} = +\infty.$$

Dunque la funzione ha gli asintoti verticali $x = -1$ e $x = 2$. Per $x \to \pm\infty$, la funzione tende a $+\infty$, per cui non ha asintoti orizzontali. Determiniamo ora l'esistenza o meno di asintoti obliqui. Essendo $x = \mathrm{sign}(x)\sqrt{x^2}$ (in altri termini, $\sqrt{x^2} = x$ per $x > 0$ e $\sqrt{x^2} = -x$ per $x < 0$) si ha:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x\sqrt{x^2 - x - 2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\pm\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = \pm 1.$$

Inoltre, per $x > 0$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
q &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2-x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-x\sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x^2-x-2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+6x^2+4}{\sqrt{x^2-x-2}(x^2+2+x\sqrt{x^2-x-2})}=\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

mentre per $x<0$ si ha:

$$
\begin{aligned}
q &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2-x-2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2+x\sqrt{x^2-x-2}}{\sqrt{x^2-x-2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+6x^2+4}{\sqrt{x^2-x-2}(x^2+2-x\sqrt{x^2-x-2})}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Quindi $y=x+\frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$, mentre $y=-x-\frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

ESERCIZIO 4

La funzione è continua e derivabile per $x<0$ (il denominatore $x-2$ non si annulla in tale intervallo) e per $x>0$ (il radicando è sempre positivo). Dobbiamo esaminare f in $x=0$. Abbiamo

$$
\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{x-2}=0=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^2+x}
$$

e quindi la funzione diventa continua in 0 se si pone $f(0)=0$. Si ha poi:

$$
\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{h^2+h}{h(h-2)}=\lim_{h\to0^-}\frac{h+1}{h-2}=-\frac{1}{2}.
$$

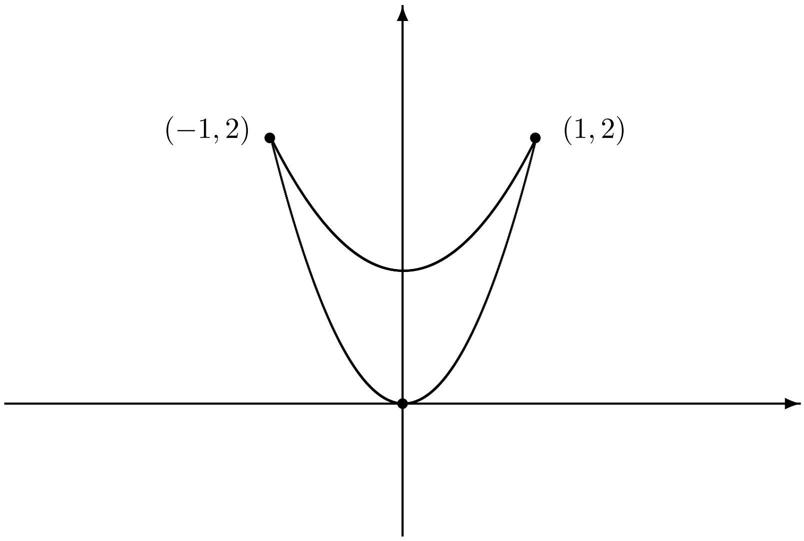
mentre

$$
\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h^2+h}}{h}=\lim_{h\to0^+}\sqrt{1+\frac{1}{h}}=+\infty.
$$

Quindi la funzione non è derivabile in $x=0$, perché presenta un punto angoloso (e una delle due tangenti è verticale).

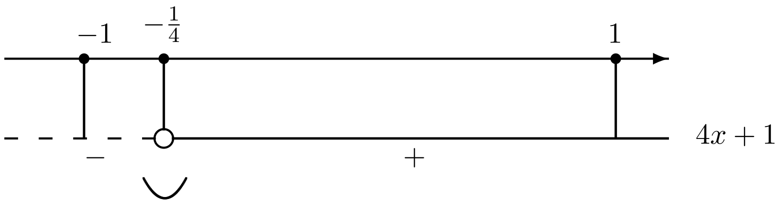
ESERCIZIO 5

Il dominio racchiuso dalle parabole è: $\{(x,y):-1\le x\le 1, 2x^2\le y\le 1+x^2\}$.



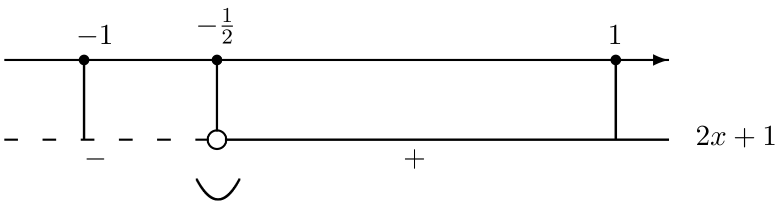
Le derivate parziali della funzione sono: $f_x \equiv 1$ e $f_y \equiv 1$, e quindi non si annullano mai. Dunque f non ha punti critici e bisogna cercare il massimo e il minimo sulla frontiera del dominio.

Per $-1 \leq x \leq 1, y = 2x^2$, la funzione diventa: $\varphi(x) = f(x, 2x^2) = 2x^2 + x + 1$, e derivando si ottiene: $\varphi'(x) = 4x + 1$. Il segno di φ è dato dal seguente grafico:



In particolare, $\varphi(-1) = 2$, $\varphi(-1/4) = 7/8$ e $\varphi(1) = 4$.

Per $-1 \leq x \leq 1, y = x^2+1$, la funzione diventa: $\psi(x) = f(x, x^2+1) = x^2+x+2$, e derivando si ottiene: $\psi'(x) = 2x + 1$. Il segno di ψ è dato dal seguente grafico:



In particolare, $\psi(-1) = 2$, $\psi(-1/2) = 7/4$ e $\psi(1) = 4$.

Esaminando i dati, possiamo conlcudere che il minimo assoluto vale $\frac{7}{8}$ ed è assunto in $(-1/4, 1/8)$, il massimo assoluto vale 4 ed è assunto in $(1, 2)$.

ESERCIZIO 6

L'unica risposta giusta è la b) (per il criterio di Leibniz). La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è un controesempio per la a), la c) e la d).