SOLUZIONI COMPITO A

ESERCIZIO 1

Per $1 \leq x \leq 2$ si ha $x^2e^{-2x} < xe^{2x^2}$, perché equivale a $x < e^{2x^2+2x}$ che è vera in $[1,2]$. Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-2x}dx &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.\end{aligned}$$

Quindi l'area richiesta vale:

$$\int_1^2 (xe^{2x^2} - x^2e^{-2x})dx = \left[\frac{1}{4}e^{2x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_1^2 = \frac{13}{4}e^{-4} + \frac{1}{4}e^8 - \frac{5}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e^2.$$

ESERCIZIO 2.

Separando le variabili, si trova $\int e^{2y}dy = \int \log x dx$, da cui si ricava $\frac{1}{2}e^{2y} = x\log x - x + c$. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 3$, otteniamo $c = 1 + \frac{1}{2}e^6$, e quindi la soluzione è:

$$y(x) = \frac{1}{2}\log\left[2x\log x - 2x + 2 + e^6\right].$$

In particolare, si ha $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \frac{1}{2}\log\left[2 + e^6\right]$ (ricordando che $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$).

ESERCIZIO 3

Con la sostituzione $t = \log x$, troviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(\log x)^{3/4} + (\log x)^{4/5}}}{\sqrt{(\log x)^{5/4} + \log x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^{3/4} + t^{4/5}}}{\sqrt{t^{5/4} + t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2/5}}{t^{5/8}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{9/40}} = 0.$$

Analogamente, ponendo $t = \frac{1}{\log x}$ troviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t^2)}{1 - \cos(t^3)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^2}{t^6} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t^4} = +\infty.$$

ESERCIZIO 4 Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2xy + 1 = 0 \\ y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$$

dal quale si ricavano i due sistemi

$$\begin{cases} -2xy + 1 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2xy + 1 = 0 \\ y + x = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, e solo il primo punto è interno al dominio. Il secondo sistema è impossibile. Si trova inoltre che l'unico punto critico interno è di sella, e quindi non puó essere né di massimo né di minimo (assoluto). Esaminiamo ora la funzione sul bordo del triangolo.

- Per $x = 0, 0 \leq y \leq 3$, la funzione vale $\varphi(y) = f(0, y) = \frac{1}{3}y^3$, che è crescente, e quindi ha minimo in $y = 0$ (vale $\varphi(0) = 0$) e massimo in $y = 3$ (vale $\varphi(3) = 9$).
- Per $y = 0, 0 \leq x \leq 3$, la funzione vale $\varphi(x) = f(x, 0) = x$, che è crescente, e quindi ha minimo in $x = 0$ (vale $\varphi(0) = 0$) e massimo in $x = 3$ (vale $\varphi(3) = 3$).
- Per $y = 3 - x = 0, 0 \leq x \leq 3$, la funzione vale $\varphi(x) = f(x, 3-x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x + 9$. Si ha $\varphi'(x) = 2x^2 - 8$, e quindi φ ha un minimo per $x = 2$ (il massimo in -2 è esterno al dominio) e $\varphi(2) = -\frac{5}{3}$. I valori agli estremi sono: $\varphi(0) = 9$ e $\varphi(3) = 3$ (giá trovati precedentemente).

Riesaminando i valori trovati, si puó concludere che il massimo assoluto è assunto in $(0, 3)$ e vale 9 e il minimo assoluto è assunto in $(2, 1)$ e vale $-\frac{5}{3}$.

ESERCIZIO 5

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \\ \frac{\log(xy)}{\sqrt{x}-2} \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases}$$

che si riconduce ai due sistemi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy \geq 1 \\ \sqrt{x} > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ 0 < xy \leq 1 \\ \sqrt{x} < 2, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono rispettivamente

$$\begin{cases} x > 4 \\ y \geq \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 0 < y \leq \frac{1}{x}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

L'unica risposta esatta è la a).

SOLUZIONI COMPITO B

ESERCIZIO 1

Per $1 \leq x \leq 2$ si ha $x^2e^{-3x} < xe^{3x^2}$, perché equivale a $x < e^{3x^2+3x}$ che è vera in $[1, 2]$. Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int x^2e^{-3x}dx &= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}x^2e^{-2x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}dx \\ &= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c. \end{aligned}$$

Quindi l'area richiesta vale:

$$\int_1^2 (xe^{3x^2} - x^2e^{-3x})dx = \left[\frac{1}{6}e^{3x^2} + \frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{9}xe^{-3x} + \frac{2}{27}e^{-3x}\right]_1^2 = \frac{1}{6}e^{12} + \frac{50}{27}e^{-6} - \frac{1}{6}e^3 - \frac{17}{27}e^{-3}.$$

ESERCIZIO 2.

Separando le variabili, si trova $\int e^{3y} dy = \int \log x dx$, da cui si ricava $\frac{1}{3}e^{3y} = x \log x - x + c$. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 2$, otteniamo $c = 1 + \frac{1}{3}e^6$, e quindi la soluzione è:

$$y(x) = \frac{1}{3} \log \left[3x \log x - 3x + 3 + e^6 \right].$$

In particolare, si ha $\lim_{x \to 0^+} y(x) = \frac{1}{3} \log \left[3 + e^6 \right]$ (ricordando che $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$).

ESERCIZIO 3

Con la sostituzione $t = \log x$, troviamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(\log x)^{3/4} + (\log x)^{2/3}}}{\sqrt{(\log x)^{4/5} + \log x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t^{3/4} + t^{2/3}}}{\sqrt{t^{4/5} + t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{3/8}}{t^{1/2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{1/8}} = 0.$$

Analogamente, ponendo $t = \frac{1}{\log x}$ troviamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(t^3)}{1 - \cos(t^2)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t^3}{t^4} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2}{t} = +\infty.$$

ESERCIZIO 4 Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ -2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

dal quale si ricavano i due sistemi

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -2xy + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ -2xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, e solo il primo punto è interno al dominio. Il secondo sistema è impossibile. Si trova inoltre che l'unico punto critico interno è di sella, e quindi non puó essere né di massimo né di minimo (assoluto). Esaminiamo ora la funzione sul bordo del triangolo.

- Per $y = 0, 0 \leq x \leq 3$, la funzione vale $\varphi(x) = f(x, 0) = \frac{1}{3}x^3$, che è crescente, e quindi ha minimo in $x = 0$ (vale $\varphi(0) = 0$) e massimo in $x = 3$ (vale $\varphi(3) = 9$).

- Per $x = 0, 0 \leq y \leq 3$, la funzione vale $\varphi(y) = f(0, y) = y$, che è crescente, e quindi ha minimo in $y = 0$ (vale $\varphi(0) = 0$) e massimo in $y = 3$ (vale $\varphi(3) = 3$).

- Per $x = 3 - y = 0, 0 \leq y \leq 3$, la funzione vale $\varphi(y) = f(3 - y, y) = \frac{2}{3}y^3 - 8y + 9$. Si ha $\varphi'(y) = 2y^2 - 8$, e quindi φ ha un minimo per $y = 2$ (il massimo in -2 è esterno al dominio) e $\varphi(2) = -\frac{5}{3}$. I valori agli estremi sono: $\varphi(0) = 9$ e $\varphi(3) = 3$ (giá trovati precedentemente).

Riesaminando i valori trovati, si puó concludere che il massimo assoluto è assunto in $(3, 0)$ e vale 9 e il minimo assoluto è assunto in $(1, 2)$ e vale $-\frac{5}{3}$.

ESERCIZIO 5

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \\ \frac{\log(2xy)}{\sqrt{x}-3} \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \end{cases}$$

che si riconduce ai due sistemi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 0 < 2xy \geq 1 \\ \sqrt{x} > 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ 2xy \leq 1 \\ \sqrt{x} < 3, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono rispettivamente

$$\begin{cases} x > 9 \\ y \geq \frac{1}{2x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 9 \\ 0 < y \leq \frac{1}{2x}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

L'unica risposta esatta è la b).

SOLUZIONI COMPITO C

ESERCIZIO 1

Per $1 \leq x \leq 2$ si ha $xe^{-2x^2} < x^2e^{2x}$, perché equivale a $1 < xe^{2x^2+2x}$ che è vera in $[1, 2]$. Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int x^2e^{2x}dx =& \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \\ =& \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c. \end{aligned}$$

Quindi l'area richiesta vale:

$$\int_1^2 (x^2e^{2x} - xe^{-2x^2})dx = \left[\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x^2}\right]_1^2 = \frac{5}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^{-8} - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^{-2}.$$

ESERCIZIO 2.

Separando le variabili, si trova $\int e^{2y}dy = \int \log x dx$, da cui si ricava $\frac{1}{2}e^{2y} = x\log x - x + c$. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1$, otteniamo $c = 1 + \frac{1}{2}e^2$, e quindi la soluzione è:

$$y(x) = \frac{1}{2}\log\left[2x\log x - 2x + 2 + e^2\right].$$

In particolare, si ha $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \frac{1}{2}\log\left[2 + e^2\right]$ (ricordando che $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$).

ESERCIZIO 3

Con la sostituzione $t = \log x$, troviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\log x+(\log x)^{4/5}}}{\sqrt{(\log x)^{6/7}+(\log x)^{5/6}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t+t^{4/5}}}{\sqrt{t^{6/7}+t^{5/6}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{1/2}}{t^{3/7}}=\lim_{t\to+\infty}t^{1/14}=+\infty.$$

Analogamente, ponendo $t=\frac{1}{\log x}$ troviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{1-\cos(t^3)}=\lim_{t\to0^+}\frac{2t}{t^6}=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{t^5}=+\infty.$$

ESERCIZIO 4 Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -xy+4=0\\ y^2-x^2=0\end{cases}$$

dal quale si ricavano i due sistemi

$$\begin{cases} -xy+4=0\\ y-x=0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} -xy+4=0\\ y+x=0.\end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni i punti $(2,2)$ e $(-2,-2)$; solo il primo punto appartiene al dominio, piú precisamente al bordo. Il secondo sistema è impossibile. E' facile inoltre verificare che $(2,2)$ è un punto di sella. Esaminiamo ora la funzione sul bordo del triangolo.

- Per $x=0, 0\le y\le 4$, la funzione vale $\varphi(y)=f(0,y)=\frac{1}{3}y^3$, che è crescente, e quindi ha minimo in $y=0$ (vale $\varphi(0)=0$) e massimo in $y=4$ (vale $\varphi(4)=\frac{64}{3}$).
- Per $y=0, 0\le x\le 4$, la funzione vale $\varphi(x)=f(x,0)=8x$, che è crescente, e quindi ha minimo in $x=0$ (vale $\varphi(0)=0$) e massimo in $x=4$ (vale $\varphi(4)=32$).
- Per $y=4-x=0, 0\le x\le 4$, la funzione vale $\varphi(x)=f(x,4-x)=\frac{2}{3}x^3-8x+\frac{64}{3}$. Si ha $\varphi'(x)=2x^2-8$, e quindi φ ha un minimo per $x=2$ (il massimo in -2 è esterno al dominio) e $\varphi(2)=\frac{32}{3}$. Notiamo inoltre che $(2,2)$ coincide con il punto di sella trovato precedentemente. I valori agli estremi sono: $\varphi(0)=\frac{64}{3}$ e $\varphi(4)=32$ (giá trovati precedentemente).

Riesaminando i valori trovati, si puó concludere che il massimo assoluto è assunto in $(4,0)$ e vale 32 e il minimo assoluto è assunto in $(0,0)$ e vale 0.
ESERCIZIO 5
Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x>0\\ xy>0\\ \frac{\log(3xy)}{\sqrt{x}-2}\ge 0\\ \sqrt{x}\ne 2\end{cases}$$

che si riconduce ai due sistemi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3xy \geq 1 \\ \sqrt{x} > 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x > 0 \\ 0 < 3xy \leq 1 \\ \sqrt{x} < 2, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono rispettivamente

$$\begin{cases} x > 4 \\ y \geq \frac{1}{3x} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 0 < y \leq \frac{1}{3x}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

L'unica risposta esatta è la c).

SOLUZIONI COMPITO D

ESERCIZIO 1

Per $1 \leq x \leq 2$ si ha $xe^{-3x^2} < x^2e^{3x}$, perché equivale a $1 < xe^{3x^2+3x}$ che è vera in $[1, 2]$. Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int x^2e^{3x}dx =& \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx \\ =& \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c. \end{aligned}$$

Quindi l'area richiesta vale:

$$\int_1^2 (x^2e^{3x} - xe^{-3x^2})dx = \left[\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{-3x^2}\right]_1^2 = \frac{26}{27}e^6 + \frac{1}{6}e^{-12} - \frac{5}{27}e^3 - \frac{1}{6}e^{-3}.$$

ESERCIZIO 2.

Separando le variabili, si trova $\int e^y dy = \int \log x dx$, da cui si ricava $e^y = x\log x - x + c$. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 2$, otteniamo $c = 1 + e^2$, e quindi la soluzione è:

$$y(x) = \log\left[x\log x - x + 1 + e^2\right].$$

In particolare, si ha $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \frac{1}{2}\log\left[1 + e^2\right]$ (ricordando che $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$).

ESERCIZIO 3

Con la sostituzione $t = \log x$, troviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(\log x)^{3/4} + \log x}}{\sqrt{(\log x)^{7/8} + (\log x)^{6/7}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^{3/4} + t}}{\sqrt{t^{7/8} + t^{6/7}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1/2}}{t^{7/16}} = \lim_{t\to+\infty} t^{1/16} = +\infty.$$

Analogamente, ponendo $t = \frac{1}{\log x}$ troviamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{\log x}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t^3)}{1 - \cos t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^3}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} 2t = 0.$$

ESERCIZIO 4 Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ -xy + 4 = 0 \end{cases}$$

dal quale si ricavano i due sistemi

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -xy + 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ -xy + 4 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni i punti $(2, 2)$ e $(-2, -2)$; solo il primo punto appartiene al dominio, piú precisamente al bordo. Il secondo sistema è impossibile. E' facile inoltre verificare che $(2, 2)$ è un punto di sella. Esaminiamo ora la funzione sul bordo del triangolo.

- Per $y = 0, 0 \leq x \leq 4$, la funzione vale $\varphi(x) = f(0, x) = \frac{1}{3}x^3$, che è crescente, e quindi ha minimo in $x = 0$ (vale $\varphi(0) = 0$) e massimo in $x = 4$ (vale $\varphi(4) = \frac{64}{3}$).
- Per $x = 0, 0 \leq y \leq 4$, la funzione vale $\varphi(y) = f(y, 0) = 8y$, che è crescente, e quindi ha minimo in $y = 0$ (vale $\varphi(0) = 0$) e massimo in $y = 4$ (vale $\varphi(4) = 32$).
- Per $x = 4 - y = 0, 0 \leq y \leq 4$, la funzione vale $\varphi(y) = f(y, 4 - y) = \frac{2}{3}y^3 - 8y + \frac{64}{3}$. Si ha $\varphi'(y) = 2y^2 - 8$, e quindi φ ha un minimo per $y = 2$ (il massimo in -2 è esterno al dominio) e $\varphi(2) = \frac{32}{3}$. Notiamo inoltre che $(2, 2)$ coincide con il punto di sella trovato precedentemente. I valori agli estremi sono: $\varphi(0) = \frac{64}{3}$ e $\varphi(4) = 32$ (giá trovati precedentemente).

Riesaminando i valori trovati, si puó concludere che il massimo assoluto è assunto in $(0, 4)$ e vale 32 e il minimo assoluto è assunto in $(0, 0)$ e vale 0.

ESERCIZIO 5

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \\ \frac{\log(4xy)}{\sqrt{x}-1} \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$$

che si riconduce ai due sistemi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4xy \geq 1 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ 0 < 4xy \leq 1 \\ \sqrt{x} < 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono rispettivamente

$$\begin{cases} x > 1 \\ y \geq \frac{1}{4x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y \leq \frac{1}{4x}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

L'unica risposta esatta è la d).