COMPITO DEL 28-03-2007

SOLUZIONI COMPITO A

ESERCIZIO 1

L'equazione è biquadratica. Risolvendola in z^2, otteniamo $z^2 = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} = \exp\left(\pm\frac{\pi}{3}i\right)$. Quindi le soluzioni sono le radici quadrate di $\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right)$ e $\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)$:

$$z = \pm\exp\left(\pm\frac{\pi}{6}i\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\right).$$

ESERCIZIO 2. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 1, 2$. Quindi la soluzione generale è $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Imponendo le condizioni iniziali, troviamo il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzioni è $C_1 = -1, C_2 = 1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = -e^x + e^{2x}$.

ESERCIZIO 3

Ricordando che $1 - \cos\frac{1}{x} \sim \frac{1}{2x^2}$ per $x \to +\infty$, troviamo subito che $\frac{1}{(1+x^4)\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)} \sim \frac{1}{x^4\cdot\frac{1}{2x^2}} = \frac{2}{x^2}$, e quindi l'integrale converge.

Per il secondo integrale bisogna usare la stima asintotica $\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$, dalla quale si ricava $\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \sim \frac{1}{x^2}$, e quindi anche il secondo integrale converge.

ESERCIZIO 4

Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione $(\frac{5}{4}, -1)$ si trova fuori del dominio.
Esaminiamo ora la funzione sul bordo del quadrilatero

- Per $x = 0, 1 \le y \le 2$, la funzione vale $\varphi(y) = f(0, y) = y^2 + 2y$. Si ha $\varphi'(y) = 2(y + 1)$, sempre positiva per $1 \le y \le 2$. Quindi φ è crescente, e quindi ha minimo in $y = 1$ (vale $\varphi(1) = 3$) e massimo in $y = 2$ (vale $\varphi(2) = 8$).
- Per $y = 0, 1 \le x \le 2$, la funzione vale $\varphi(x) = f(x, 0) = 2x^2 - 5x$. Si ha $\varphi'(x) = 4x - 5$ e quindi φ è decrescente per $1 \le x \le \frac{5}{4}$, ha un minimo relativo in $x = \frac{5}{4}$ ed è crescente per $\frac{5}{4} \le x \le 2$. Inoltre, $\varphi(1) = -3$, $\varphi(\frac{5}{4}) = -\frac{25}{8}$ e $\varphi(2) = -2$.
- Per $y = 1 - x, 0 \le x \le 1$, la funzione vale $\varphi(x) = f(x, 1 - x) = 3x^2 - 9x + 3$. Quindi $\varphi'(x) = 6x - 9$, che è sempre negativa nel dominio. Quindi φ è decrescente e ha un minimo per $x = 1$ (e si ha $\varphi(1) = -3$) e un massimo in $x = 0$ (e si ha $\varphi(0) = 3$).

- Per $y = 2 - x, 0 \leq x \leq 2$, la funzione vale $\varphi(x) = f(x, 2-x) = 3x^2 - 11x + 8$. Si ha $\varphi'(x) = 6x - 11$, e quindi è decrescente per $0 \leq x \leq \frac{11}{6}$, ha un minimo relativo in $x = \frac{11}{6}$ ed è crescente per $\frac{11}{6} \leq x \leq 2$. Inoltre, $\varphi(0) = 8$, $\varphi(\frac{11}{6}) = -\frac{25}{12}$ e $\varphi(2) = -2$.

Riesaminando i valori trovati, si puó concludere che il massimo assoluto è assunto in $(0, 2)$ e vale 8 e il minimo assoluto è assunto in $(\frac{5}{4}, 0)$ e vale $-\frac{25}{8}$.

ESERCIZIO 5

La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty$$

mentre

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{1}{\mp 0} = \mp\infty.$$

In particolare, le discontinuitá sono punti di infinito e $x = 1$, $x = -1$ sono asintoti verticali. Infine abbiamo $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+x^2-x}{x(x^2-1)} = 1$ e poi $\frac{x^3+x^2-x}{x^2-1} - x = \frac{x^2}{x^2-1} \to 1$ per $x \to \pm\infty$, e quindi $y = x + 1$ è un asintoto obliquo (dividendo i polinomi si ricava $\frac{x^3+x^2-x}{x^2-1} = x + 1 + \frac{1}{x^2-1}$).

ESERCIZIO 6

L'unica risposta esatta è la c).

SOLUZIONI COMPITO B

ESERCIZIO 1

L'equazione è biquadratica. Risolvendola in z^2, otteniamo $z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2} = \exp\left(\pm \frac{2\pi}{3} i\right)$. Quindi le soluzioni sono le radici quadrate di $\exp\left(\frac{2\pi}{3} i\right)$ e $\exp\left(-\frac{2\pi}{3} i\right)$:

$$z = \pm \exp\left(\pm \frac{\pi}{3} i\right) = \pm \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right).$$

ESERCIZIO 2.

L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 1, 3$. Quindi la soluzione generale è $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. Imponendo le condizioni iniziali, troviamo il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases}$$

la cui soluzioni è $C_1 = -1, C_2 = 1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = -e^x + e^{3x}$.

ESERCIZIO 3

Ricordando che $\sin \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, troviamo subito che $\frac{1}{(1+x^4)\left(\sin \frac{1}{x^2}\right)} \sim \frac{1}{x^4 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$, e quindi l'integrale converge.

Per il secondo integrale bisogna usare la stima asintotica $\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, dalla quale si ricava $\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{5/2}}$, e quindi anche il secondo integrale converge.

ESERCIZIO 4

Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4y - 5 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione $(-1, \frac{5}{4})$ si trova fuori del dominio.
Esaminiamo ora la funzione sul bordo del quadrilatero

- Per $y = 0, 1 \le x \le 2$, la funzione vale $\varphi(x) = f(x, 0) = x^2 + 2x$. Si ha $\varphi'(x) = 2(x+1)$, sempre positiva per $1 \le x \le 2$. Quindi φ è crescente, e quindi ha minimo in $x = 1$ (vale $\varphi(1) = 3$) e massimo in $x = 2$ (vale $\varphi(2) = 8$).
- Per $x = 0, 1 \le y \le 2$, la funzione vale $\varphi(y) = f(0, y) = 2y^2 - 5y$. Si ha $\varphi'(y) = 4y - 5$ e quindi φ è decrescente per $1 \le y \le \frac{5}{4}$, ha un minimo relativo in $y = \frac{5}{4}$ ed è crescente per $\frac{5}{4} \le y \le 2$. Inoltre, $\varphi(1) = -3$, $\varphi(\frac{5}{4}) = -\frac{25}{8}$ e $\varphi(2) = -2$.
- Per $x = 1 - y, 0 \le y \le 1$, la funzione vale $\varphi(y) = f(1-y, y) = 3y^2 - 9y + 3$. Quindi $\varphi'(y) = 6y - 9$, che è sempre negativa nel dominio. Quindi φ è decrescente e ha un minimo per $y = 1$ (e si ha $\varphi(1) = -3$) e un massimo in $y = 0$ (e si ha $\varphi(0) = 3$).
- Per $x = 2 - y, 0 \le y \le 2$, la funzione vale $\varphi(y) = f(2-y, y) = 3y^2 - 11y + 8$. Si ha $\varphi'(y) = 6y - 11$, e quindi è decrescente per $0 \le y \le \frac{11}{6}$, ha un minimo relativo in $y = \frac{11}{6}$ ed è crescente per $\frac{11}{6} \le y \le 2$. Inoltre, $\varphi(0) = 8$, $\varphi(\frac{11}{6}) = -\frac{25}{12}$ e $\varphi(2) = -2$.

Riesaminando i valori trovati, si puó concludere che il massimo assoluto è assunto in $(2, 0)$ e vale 8 e il minimo assoluto è assunto in $(0, \frac{5}{4})$ e vale $-\frac{25}{8}$.

ESERCIZIO 5

La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{2}{\pm 0} = \pm\infty$$

mentre

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{2}{\mp 0} = \mp\infty.$$

In particolare, le discontinuitá sono punti di infinito e $x = 1$, $x = -1$ sono asintoti verticali. Infine abbiamo $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+2x^2-x}{x(x^2-1)} = 1$ e poi $\frac{x^3+2x^2-x}{x^2-1} - x = \frac{2x^2}{x^2-1} \to 2$ per $x \to \pm\infty$, e quindi $y = x + 2$ è un asintoto obliquo (dividendo i polinomi si ricava $\frac{x^3+2x^2-x}{x^2-1} = x + 2 + \frac{2}{x^2-1}$).

ESERCIZIO 6

L'unica risposta esatta è la a).