COMPITO DEL 28-06-2007

SOLUZIONI COMPITO A

ESERCIZIO 1

a) La funzione è definita quando $x+y \neq 0$ e $\frac{1+xy}{x+y} > 0$. Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

Si ha $\quad x+y>0 \quad$ quando $\quad y>-x; \qquad\qquad$ si ha $\quad x+y<0 \quad$ quando $\quad y<-x.$

La disequazione $1+xy>0$ equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x>0 \\ xy+1>0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x<0 \\ xy+1>0, \end{cases}$$

che risolti danno

$$\begin{cases} x>0 \\ y>-\frac{1}{x} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x<0 \\ y<-\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Notiamo anche che per $x=0$ l'espressione $1+xy$ vale sempre 1. Dato che la retta $y=-x$ e l'iperbole $xy+1=0$ si intersecano nei punti $(-1,1)$ e $(1,-1)$, una volta eseguito il disegno si trova facilmente che la funzione è definita negli insiemi

$$\begin{aligned}
&\{(x,y): x<-1, -\frac{1}{x}<y<-x\} \cup \{(x,y): -1<x<0, -x<y<-\frac{1}{x}\} \cup \\
&\cup \big(\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0\} \setminus \{(0,0)\}\big) \cup \{(x,y): -1<y<0, -y<x<-\frac{1}{y}\} \cup \\
&\cup \{(x,y): y<-1, -\frac{1}{y}<x<-y\}
\end{aligned}$$

b) I punti critici si trovano annullando entrambe le derivate parziali prime:

$$\begin{cases} \frac{y^2-1}{(1+xy)(x+y)} = 0 \\ \frac{x^2-1}{(1+xy)(x+y)} = 0. \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono $(-1,-1), (-1,1), (1,-1)$ e $(1,1)$, ma solo $(1,1)$ appartiene al dominio di esistenza, e quindi è l'unico punto critico.

ESERCIZIO 2.

L'equazione è lineare del primo ordine. Abbiamo $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$ e quindi, integrando,

$$A(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + 2} dx = \int \frac{d(\sin x + 2)}{\sin x + 2} = \log(\sin x + 2).$$

Cercando la soluzione nella forma $y(x) = \frac{v(x)}{\sin x + 2}$, troviamo l'equazione $v' = 1$, la cui soluzione è $v(x) = x + c$. Quindi la soluzione generale è: $y(x) = \frac{x}{\sin x + 2} + \frac{c}{\sin x + 2}$. In modo alternativo, riscrivendo l'equazione nella forma $y'(\sin x + 2) + y\cos x = 1$ (notando anche che $\sin x + 2$ è sempre diverso da 0), si trova che questa equivale a $\frac{d}{dx}\big[y(\sin x+2)\big]=1$, che si risolve immediatamente: $y(\sin x+2)=x+c$.

Imponendo la condizione di Cauhy, si trova facilmente $c=\pi$, e quindi la soluzione dell'esercizio è

$$y(x)=\frac{x}{\sin x+2}+\frac{\pi}{\sin x+2}.$$

ESERCIZIO 3

a) Ricordando che $\log(1+x)\sim x$ per $x\to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\log(1+x)\log x=\lim_{x\to 0^+}x\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\log x}=\lim_{x\to 0^+}\exp[\log x\log(1+x)]=\exp(0)=1.$$

b) Ricordando che $\sin t\sim t$ per $t\to 0$, si trova subito

$$\frac{\sin\sqrt[7]{x}}{\log(1+\sqrt[5]{x})}\sim\frac{\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}}=x^{-2/35}\to+\infty\qquad\text{per}\qquad x\to 0^+.$$

ESERCIZIO 4

Posto $z=x+iy$, l'equazione equivale a $x^2-y^2+2ixy+2iy=0$, e quindi al sistema

$$\begin{cases}x^2-y^2=0\\ 2y(x+1)=0.\end{cases}$$

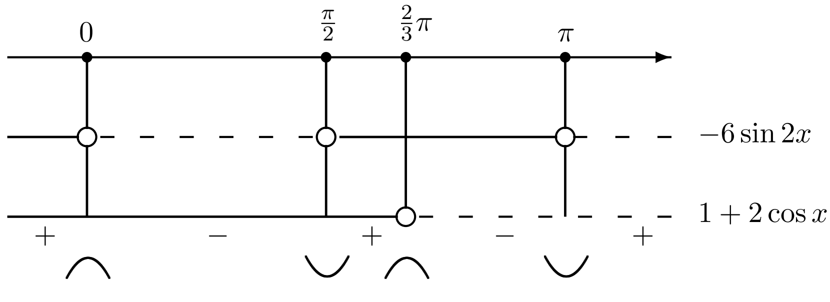
Questo si spezza nei due sistemi

$$\begin{cases}y=0\\ x^2=0\end{cases}\qquad\text{e}\qquad\begin{cases}x=-1\\ y^2=1,\end{cases}$$

le cui soluzioni sono rispettivamente $(0,0)$ e $(-1,\pm1)$. Quindi le soluzioni dell'equazione sono: $0,-1-i$ e $-1+i$.

ESERCIZIO 5

La derivata della funzione vale: $f'(x)=-6\sin(2x)(1+2\cos x)$. Si ha $-6\sin(2x)\geq 0$ per $x=0$ e $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$ e poi $1+2\cos x\geq 0$ per $0\leq x\leq\frac{2}{3}\pi$ (ma si annulla solo per $x=\frac{2}{3}\pi$). Quindi i punti critici di $f(x)$ in $[0,\pi]$ sono: $0,\frac{2}{3}\pi$ (max relativi) e $\frac{\pi}{2},\pi$ (min relativi). Riassumiamo con un grafico lo studio del segno.



Si ha poi $f(0) = 11$, $f(\frac{\pi}{2}) = -3$, $f(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{5}{2}$ e $f(\pi) = -5$. Quindi $\max_{[0,\pi]} f = 11$ e $\min_{[0,\pi]} f = -5$.

ESERCIZIO 6

Le funzioni a) e b) hanno discontinuità eliminabili, c) e d) hanno discontinuità di salto.

SOLUZIONI COMPITO B

ESERCIZIO 1

a) La funzione è definita quando $x - y \neq 0$ e $\frac{1-xy}{x-y} > 0$. Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

Si ha $\quad x - y > 0 \quad$ quando $\quad y < x$; $\qquad$ si ha $\quad x - y < 0 \quad$ quando $\quad y > x$.

La disequazione $1 - xy > 0$ equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - xy > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ 1 - xy > 0, \end{cases}$$

che risolti danno

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ y > \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Notiamo anche che per $x = 0$ l'espressione $1 - xy$ vale sempre 1. Dato che la retta $y = x$ e l'iperbole $1 - xy = 0$ si intersecano nei punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, una volta eseguito il disegno si trova facilmente che l'insieme di definizione della funzione è

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : x < -1, x < y < \frac{1}{x}\} \cup \{(x, y) : -1 < x < 0, \frac{1}{x} < y < x\} \cup \\ &\cup \big(\{(x, y) : x \geq 0, y \leq 0\} \setminus \{(0, 0)\}\big) \cup \{(x, y) : 0 < y < 1, y < x < \frac{1}{y}\} \cup \\ &\cup \{(x, y) : y > 1, \frac{1}{y} < x < y\} \end{aligned}$$

b) I punti critici si trovano annullando entrambe le derivate parziali prime:

$$\begin{cases} \frac{y^2-1}{(1-xy)(x-y)} = 0 \\ \frac{1-x^2}{(1-xy)(x-y)} = 0. \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1)$ e $(1, 1)$, ma solo $(1, -1)$ appartiene al dominio di esistenza, e quindi è l'unico punto critico.

ESERCIZIO 2

L'equazione è lineare del primo ordine. Abbiamo $a(x) = -\frac{\sin x}{\cos x+2}$ e quindi, integrando,

$$A(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x + 2}dx = \int \frac{d(\cos x + 2)}{\cos x + 2} = \log(\cos x + 2).$$

Cercando la soluzione nella forma $y(x) = \frac{v(x)}{\cos x+2}$, troviamo l'equazione $v' = 1$, la cui soluzione è $v(x) = x + c$. Quindi la soluzione generale è: $y(x) = \frac{x}{\cos x+2} + \frac{c}{\cos x+2}$. In modo alternativo, riscrivendo l'equazione nella forma $y'(\cos x+2)-y\sin x = 1$ (notando anche che $\cos x+2$ è sempre diverso da 0), si trova che questa equivale a $\frac{d}{dx}\big[y(\cos x+2)\big] = 1$, che si risolve immediatamente: $y(\cos x + 2) = x + c$.

Imponendo la condizione di Cauhy, si trova facilmente $c = \pi$, e quindi la soluzione dell'esercizio è

$$y(x) = \frac{x}{\cos x + 2} + \frac{\pi}{\cos x + 2}.$$

ESERCIZIO 3

a) Ricordando che $\log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \log(1+x)\log x = \lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp[\log(1+x)\log x] = \exp(0) = 1.$$

b) Ricordando che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, si trova subito

$$\frac{\log(1+\sqrt[5]{x})}{\sin\sqrt[4]{x}} \sim \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[4]{x}} = x^{-1/20} \to +\infty \qquad \text{per} \qquad x \to 0^+.$$

ESERCIZIO 4

Posto $z = x + iy$, l'equazione equivale a $x^2 - y^2 + 2ixy - 2x = 0$, e quindi al sistema

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

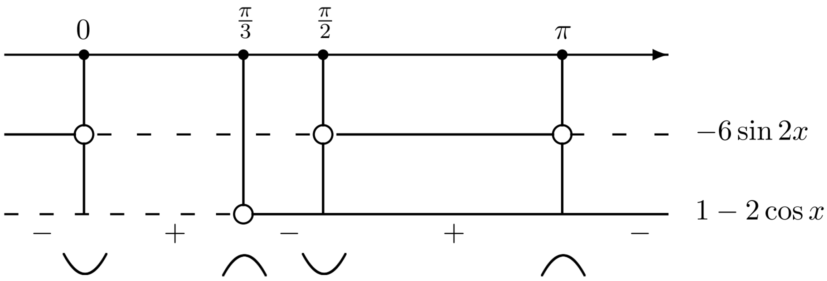
Questo si spezza nei due sistemi

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, 0)$ e $(2, 0)$. Quindi le soluzioni dell'equazione sono: 0 e 2.

ESERCIZIO 5

La derivata della funzione vale: $f'(x) = -6\sin(2x)(1 - 2\cos x)$. Si ha $-6\sin(2x) \geq 0$ per $x = 0$ e $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ e poi $1 - 2\cos x \geq 0$ per $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ (ma si annulla solo per $x = \frac{\pi}{3}$). Quindi i punti critici di $f(x)$ in $[0, \pi]$ sono: $\frac{\pi}{3}, \pi$ (max relativi) e $0, \frac{\pi}{2}$ (min relativi). Riassumiamo in un grafico lo studio del segno.



Si ha poi $f(0) = -5$, $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{5}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = -3$ e $f(\pi) = 11$. Quindi $\max_{[0,\pi]} f = 11$ e $\min_{[0,\pi]} f = -5$.

ESERCIZIO 6

Le funzioni b) e c) hanno discontinuità eliminabili, a) e d) di salto.