ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 24.01.2024 B

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2+z^2 \le x \le 2y+2z\}$. Calcolare

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}^+ dS, \qquad \mathbf{V}(x,y,z) = (\log|z-6|,\ y^3+xz,\ 0).$$

$N^+ = N_e =$ normale esterna a Ω

8 punti

Risposta: 8π

Svolgimento:

$$\iint_{\partial\Omega} V\cdot N^+ dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V}\, d\underline{x} = \iiint_{\Omega} 3y^2\, dx\,dy\,dz$$

Ω dominio normale: $y^2+z^2 \le 2y+2z \iff (y-1)^2+(z-1)^2 \le 2$

$$\Omega = \{(x,y,z) : (y,z)\in D,\ y^2+z^2 \le x \le 2y+2z\}$$
$$D = \{(y,z) : (y-1)^2+(z-1)^2 \le 2\}$$

$$\iiint_{\Omega} 3y^2 = \iint_D \left(\int_{y^2+z^2}^{2y+2z} 3y^2\, dx\right) dy\,dz = \iint_D (2y+2z-y^2-z^2)\,3y^2\, dy\,dz$$

$$= -\iint_D \left((y-1)^2+(z-1)^2-2\right) 3y^2\, dy\,dz$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2)(\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho\cos\varphi + 1)\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 3\pi\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3(2-\rho^2)\,d\rho + 6\pi\int_0^{\sqrt{2}} \rho(2-\rho^2)\,d\rho$$

$$= 3\pi\left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} + 6\pi\left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 3\pi\Big(\underbrace{2-\frac{8}{6}}_{2/3}\Big) + 6\pi\Big(\underbrace{2-1}_{1/4}\Big)$$

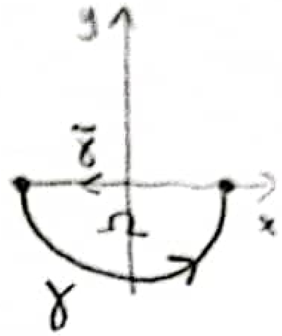
(2) Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (x^8 - y^2, 5 - e^{y^2})$ lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

8 punti

Risposta: $-\frac{10}{9}$

Svolgimento:

Scelgo Ω come in figura.



$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}^+ \, ds$$

$$= \iint_\Omega \text{rot}\, \underline{F} \cdot \underline{e}_3 \, dx\,dy - \int_{\tilde{\gamma}} \underline{F} \cdot \underline{T}^+ \, ds$$

$$= \iint_\Omega 2y \, dx\,dy - \int_{\tilde{\gamma}} \underline{F} \cdot (-1, 0) \, ds$$

$$= \int_\pi^{2\pi} \int_0^1 2\rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\rho + \int_{-1}^1 x^8 \, dx$$

$$= (-2) \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{10}{9}$$

(3) Determinare tutte le soluzione della EDO

$$(x-1)^2 y''(x) - 6\,y(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1$$

tali che $y(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

8 punti

Risposta:

$$y(x) = \frac{C}{(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)}$$

Svolgimento:

Pongo $z = x-1$. $\quad z^2 y'' - 6y = \frac{1}{z}$, $z > 0$

Eulero : $s = \log z \quad y''(s) - y'(s) - 6y(s) = e^{-s}$

Omogenea: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm 5}{2} <^{3}_{-2}$

$$y_0(s) = C_1 e^{3s} + C_2 e^{-2s}$$

Sol. part.: somiglianza $\quad y_p(s) = Ae^{-s}$

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = (A + A - 6A)e^{-s} = e^{-s} \iff A = -1/4$$

Integrale generale: $y(s) = C_1 e^{3s} + C_2 e^{-2s} - \frac{1}{4} e^{-s}$

$$y(z) = C_1 z^3 + C_2 z^{-2} - \frac{1}{4} z^{-1}$$

$$y(x) = C_1 (x-1)^3 + \frac{C_2}{(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)}$$

$y \to 0$ per $x \to +\infty \iff C_1 = 0$.