A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

È consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 1, \ y \ge -|x|\}$. Calcolare

$$\int_{\partial\Omega^+} xy^2\,\mathrm{d}y - (e^x + 2y)\mathrm{d}x.$$

8 punti

Risposta:

$$\frac{27}{16}\pi - \frac{1}{8}$$

Svolgimento:

$$\int_{\partial\Omega^+} xy^2 dy - (e^x+2y)\,dx$$

II rel

$$= \int_{\partial\Omega^+} (xy^2, e^x+2y)\cdot \underline{n}_e \, ds$$

Teo DIV

$$= \iint_\Omega \operatorname{div}(xy^2, e^x+2y)\,dx\,dy = \iint_\Omega (y^2+2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\pi + \iint_\Omega y^2\,dx\,dy = \frac{3}{2}\pi + \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{5/4\pi} \rho^3 \sin^2\varphi \, d\varphi\, d\rho$$

$$= \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{4}\cdot \left.\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2}\right|_{-\pi/4}^{5/4\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{8}\left(+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{27}{16}\pi - \frac{1}{8}$$

(2) (a) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui tutte le soluzioni della seguente EDO sono limitate in $\mathbb{R}$:

$$2y''(x) + 6\alpha y'(x) + 5\alpha^2 y(x) = 0.$$

(b) Determinare l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y''(x) + 12y'(x) + 20y(x) = 20x \\ y(0) = -\frac{3}{5},\ y'(0) = 0. \end{array} \right\}$$

8 punti

Risposta: (a) $\nexists \alpha$

(b) $y(x) = -e^{-3x}\sin x + x - \frac{3}{5}$

Svolgimento:

(a) $2\lambda^2 + 6\alpha\lambda + 5\alpha^2 = 0 \qquad \Delta = 36\alpha^2 - 40\alpha^2 = -4\alpha^2$

$\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow y_0(x) = C_1 + C_2 x$ NO

$\alpha \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-6\alpha \pm 2i|\alpha|}{4} = -\frac{3}{2}\alpha \pm i\frac{|\alpha|}{2}$

$\Rightarrow y_0(x) = e^{-\frac{3}{2}\alpha x}\left(A\cos\left(\frac{|\alpha|}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{|\alpha|}{2}x\right)\right)$

$\Rightarrow \nexists \alpha$: sono illimitate per $x \to +\infty$ $(\alpha<0)$ o $x \to -\infty$ $(\alpha>0)$

(b) $\alpha = 2 \qquad y_0(x) = e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$

$y_p(x) = ax + b \qquad 2y'' + 12y' + 20y \overset{?}{=} 12a + 20ax + 20b = 20x$

$\Leftrightarrow a = 1,\ b = -\frac{3}{5}$

$y(x) = e^{-3x}(A\cos x + B\sin x) + x - \frac{3}{5}$

$y(0) = A - \frac{3}{5} \overset{?}{=} -\frac{3}{5} \Leftrightarrow A = 0$

$y'(0) = \left[e^{-3x}(-3B\sin x + B\cos x) + 1\right]_{x=0}$

$\doteq B + 1 \overset{?}{=} 0 \Leftrightarrow B = -1$

(3) Per $A \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}_A(x, y, z) = (Ax^2z - y^2z^2 \, , \, -2xyz^2 \, , \, x^3 - 2xy^2z).$$

(a) Determinare i valori di $A \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{F}_A$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$ e determinarne una funzione potenziale.
(b) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}_0$ lungo il segmento di estremi $(0, 1, 0)$ e $(2, 1, 2)$.

8 punti

Risposta: (a) $A=3$, $V(x,y,z) = x^3z - xy^2z^2$

(b) -4

Svolgimento:

(a) $U(x,y,z) = \int (Ax^2z - y^2z^2)\,dx = A\frac{x^3}{3}z - xy^2z^2 + C(y,z)$

$U_z(x,y,z) = A\frac{x^3}{3} - 2xy^2z + \frac{\partial C}{\partial z} \overset{\overset{?}{0}}{=} x^3 - 2xy^2z \iff A=3$

$U_y(x,y,z) = -2xyz^2$ <u>OK</u>

(b) $\int_\gamma F_0 \cdot d\underline{x} = \int_\gamma F_3 \cdot d\underline{x} - \int_\gamma 3x^2z\,dx$

$= U(2,1,2) - U(0,1,0) - \int_0^2 3x^3\,dx$

$= (16-8) - (0-0) - \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^2$

$= 8 - 12 = -4.$