ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 15.02.2023 A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

È consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y) = x^2 + y$ su

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^4 + y^2 = 8\}.$$

8 punti

Risposta: $\max\limits_{\Gamma} f = 4$, $\min\limits_{\Gamma} f = -2\sqrt{2}$

Svolgimento: Tutti i punti di Γ sono regolari; $\nabla g(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = 0 \notin \Gamma$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y - \lambda(x^4 + y^2 - 8)$$

$$\nabla\mathcal{L} = 0 \iff \begin{cases} 2x - 4\lambda x^3 = 0 = 2x(1 - 2\lambda x^2) \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^4 + y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2\lambda x^2 = 1 \\ 2\lambda y = 1 \\ \dots \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1/2\lambda \\ y = 1/2\lambda \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 8 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{(0, \pm 2\sqrt{2})}$$

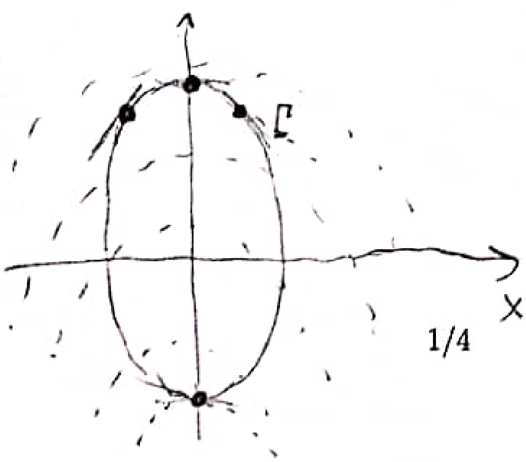
$$\frac{1}{2\lambda^2} = 8 \quad \lambda = \pm\frac{1}{4} \begin{cases} \lambda = -1/4 & \text{NO} \\ \lambda = 1/4 & x^2 = 2 \\ & y = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{(\pm\sqrt{2}, 2)}$$

$$f(0, \pm 2\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2}$$

$$f(\pm\sqrt{2}, 2) = 2 + 2 = 4$$

---- Insiemi di livello di f



(2) (a) Per ogni $\lambda > 0$, determinare l'integrale generale di

$$y'' + \lambda^2 y = -e^x.$$

(b) Determinare i valori di $\lambda > 0$ per cui l'equazione

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

ammette soluzioni non identicamente nulle tali che $y'(0) = y'(\pi) = 0$.

8 punti

Risposta: (a) $y(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) - \frac{e^x}{1+\lambda^2}$

(b) $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Svolgimento:

(a)

om $\quad z^2 + \lambda^2 = 0 \qquad z = \pm i\lambda \qquad y_0(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$

part $\quad$ somiglianza: $y_p(x) = Ce^x$, $y_p''(x) = Ce^x$ $\quad\Big|\quad (1+\lambda^2)Ce^x = -e^x \iff C = -\frac{1}{1+\lambda^2}$

(b) $y'(x) = -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x)$

$y'(0) = B\lambda = 0 \Rightarrow B = 0$

$y'(\pi) = -A\lambda\sin(\lambda\pi) = 0 \iff \begin{cases} A = 0 \ \text{(soluzione identicamente nulla)} \\ \lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

(3) Calcolare l'area della superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : y = \sqrt{x^2+z^2},\ 0 < \frac{1}{z} \le x \le \frac{5}{2} - z\right\}.$$

8 punti

Risposta: $\sqrt{2}\left[\frac{24-10+1}{8} - \log 4\right]$

Svolgimento:

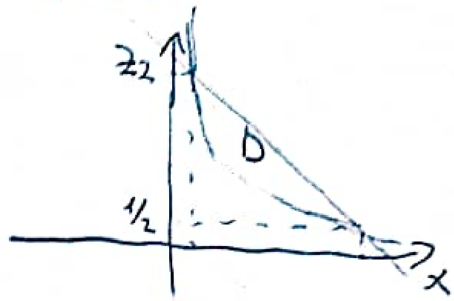
Σ cartesiana $\qquad \sigma(x,z) = \left(x, \sqrt{x^2+z^2}, z\right)$

$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{1}{z} \le x \le \frac{5}{2} - z\right\}$$

$$|\Sigma| = \iint_\Sigma 1\, dS = \iint_D \|\sigma_x \wedge \sigma_z\|\, dx\, dz$$

$$\|\sigma_x \wedge \sigma_z\| = \sqrt{1 + |\underbrace{\nabla (x^2+z^2)^{1/2}}_{= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)}|^2} = \sqrt{2}$$

$$|\Sigma| = \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dz$$



D semplice

$$\frac{1}{z} = \frac{5}{2} - z \iff 2 = 5z - 2z^2 \iff 2z^2 - 5z + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$z = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases}$$

$$|\Sigma| = \int_{1/2}^{2} \int_{1/z}^{\frac{5}{2}-z} \sqrt{2}\, dx\, dz = \sqrt{2}\int_{1/2}^{2} \left(\frac{5}{2} - z - \frac{1}{z}\right) dz = \sqrt{2}\left[\frac{5}{2}z - \frac{z^2}{2} - \log z\right]_{1/2}^{2}$$

$$= \sqrt{2}\left[5 - 2 - \log 2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{8} + \log\frac{1}{2}\right]$$