Analisi matematica 2 (I mod) – Ing. Elettronica
PROFF. GIACOMELLI e VERGARA CAFFARELLI
ESEMPI DI ESERCIZI D'ESAME — A.A.07/08

Versione preliminare – si prega di segnalare eventuali errori

---

*) Determinare (se esistono) i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della seguente funzione:

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y+y^2-6y,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

....

Si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y)=x^2+xy=x(x+y)=0 \\ f_y(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2y-6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x=-y \\ y^2+4y-12=0 \end{cases}$$

da cui segue che i punti critici sono $P_1=(0,3)$, $P_2=(6,-6)$, $P_3=(-2,2)$. Si ha

$$D^2f(x,y)=\begin{pmatrix} 2x+y & x \\ x & 2 \end{pmatrix}.$$

Perciò $\det D^2f(P_1)=6$, $\det D^2f(P_2)=-24$, $\det D^2f(P_3)=-8$, da cui segue che P_1 è un punto di minimo locale e P_2, P_3 sono punti di sella.

---

*) Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}(x+y+4)^2\ ;$$

determinare (se esistono) i punti di massimo locale e i punti di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.

....

Risposta: $(2,2)$ punto di minimo locale, $(-1,-1)$ punto di massimo locale ($(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ punti di sella.

---

*) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y)=x+2y$ nel dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$.

....

Poiché f è regolare e $\nabla f=(1,2)$, il massimo e il minimo assoluto sono assunti su ∂D. Per deteminarli si può parametrizzare la frontiera o utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. In quest'ultimo caso, posto

$$L(x,y,\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 \\ L_y=2+2\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

si ottiene
$$(x, y, \lambda) = \pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, -\sqrt{5}/2).$$
Perciò $\max_D f = \sqrt{5}$ e $\min_D f = -\sqrt{5}$.

---

*) Utilizzando il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione
$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\; xy$$
nell'insieme
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}\ .$$
. . . .

Risposta: $\max\limits_{\Gamma} f = 1, \; \min\limits_{\Gamma} f = -1/2.$

---

*) Calcolare
$$\iint_D \cos(\pi y)\; dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x - 2| \le y \le \frac{1}{2}x\right\}.$$
. . . .

Si ha
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [4/3, 4], \; |x - 2| \le y \le x/2\right\}.$$
Perciò
$$\begin{aligned}
\iint_D \cos(\pi y) dxdy &= \int_{4/3}^{4} \int_{|x-2|}^{x/2} \cos(\pi y) dy\; dx = \frac{1}{\pi} \int_{4/3}^{4} (\sin(\pi x/2) - \sin(\pi |x - 2|))\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{4/3}^{4} \sin(\pi x/2) dx - \frac{1}{\pi} \int_{4/3}^{2} \sin(-\pi x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{2}^{4} \sin(\pi x) dx \\
&= -\frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x/2)\Big|_{4/3}^{4} - \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x)\Big|_{4/3}^{2} + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x)\Big|_{2}^{4} \\
&= \frac{1}{\pi^2}(-2 - 1 - 1 - 1/2 + 1 - 1) = -\frac{9}{2\pi^2}.
\end{aligned}$$

---

*) Sia
$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1\}\ ;$$
calcolare
$$\iint_Q \sqrt{|y - x|}\; dxdy\ .$$
. . . .

Risposta: 8/15.

---

*) Sia
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \; y \le x^2, \; x^2 + y^2 \le 2\}\ ;$$

calcolare

$$\iint_D x\ dxdy\ .$$

. . . .

Risposta: $2^{3/2}/3 + 7/12$.

---

*) Calcolare

$$\int_\gamma (x\ e^y\ dx + \sin x\ dy)\ ,$$

dove γ è una curva semplice regolare che ha come sostegno l'insieme

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y = x^2\right\}$$

percorso una sola volta da $(0,0)$ a $(1,1)$.

. . . .

La parametrizzazione più semplice della curva è $\gamma(x) = (x, x^2)$, $x \in [0,1]$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x\ e^y\ dx + \sin x\ dy) &= \int_0^1 \left(xe^{x^2} + 2x \sin x\right) dx = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + 2\sin x - 2x\cos x\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e-1) + 2\sin 1 - 2\cos 1.\end{aligned}$$

---

*) (a) Determinare (se esiste) una primitiva della forma differenziale

$$\omega = y^2 dx + 2xy\ dy;$$

(b) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, con

$$\gamma(t) = (1 - \sin(\pi t^2), \cos(\pi t^2)), \quad t \in [0,1].$$

. . . .

(a) $U(x,y) = xy^2 + C$.
(b) Osservando che $\gamma(1) = (1,-1)$ e $\gamma(0) = (1,1)$, si ottiene

$$\int_\gamma \omega = U(1,-1) - U(1,1) = 0.$$

---

*) Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = (ye^{xy} + 3x)dx + (xe^{xy} + 1)dy$$

e sia γ la curva definita da

$$\gamma(\theta) \quad = \quad \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\ ;$$

calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega\ .$$

. . . .

Ragionando come nell'Esercizio precedente, si ottiene:

$$\int_{+\gamma} \omega = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{-1/2}.$$

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \left(x + \arctan\left(e^{y^2}\right)\right) dy,$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 1, \ -x \leq y \leq 1\right\}.$$

. . . .

Per le formule di Gauss-Green,

$$\int_{+\partial\Omega} \left(x + \arctan\left(e^{y^2}\right)\right) dy = \iint_{\Omega} \left(x + \arctan\left(e^{y^2}\right)\right)_x \ dxdy = |\Omega| = 2.$$

---

*) Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = (y - x)\, dx + x\, dy$$

e sia γ la curva definita da

$$\gamma(t) \quad = \quad \begin{cases} e^t \\ \cos t \end{cases} , \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ ;$$

calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega \ .$$

. . . .

Risposta: $-e^{\pi}/4 - 1/2$.

---

*) Sia S il grafico della funzione

$$z = x + 3y, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\}.$$

Calcolare

$$\iint_S y \ d\sigma.$$

. . . .

Si ha

$$\iint_S y \ d\sigma \quad = \quad \iint_D y\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \ dxdy = \sqrt{11} \int_0^1 \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \ d\theta dr = \frac{2}{3}\sqrt{11}.$$

---

*) Sia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definita da

$$f(z)=\frac{e^{-iz}}{(z-i)(z^2+5i)}\ ;$$

(a) determinarne i poli;
(b) calcolare

$$\int_{\partial D+} f(z)\ dz, \quad D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\}.$$

....

(a). I poli sono tutti e soli soluzioni di

$$(z-i)(z^2+5i)=0 \iff z=i,\ z^2=-5i=5e^{\frac{3i\pi}{2}}.$$

Quindi i poli sono $z_0=i$, $z_1=\sqrt{5/2}(-1+i)$, $z_2=\sqrt{5/2}(1-i)$.
(b). L'unico polo interno a D è z_0. Quindi

$$\int_{\partial D+} f(z)\ dz=2\pi i\ \mathrm{Res}f|_{z_0}=\frac{2\pi i e}{5i-1}.$$

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega}\frac{1}{z^2+2iz+2}\ dz,$$

dove

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\ |z+i|\le 2\}.$$

....

Si ha

$$z^2+2iz+2=(z+i)^2+3=0 \iff z=z_1=(-1-\sqrt{3})i \text{ oppure } z=z_2=(-1+\sqrt{3})i.$$

Si ha $z_1\in\Omega$, $z_2\in\Omega$ e

$$\mathrm{Res}(z_1)=\frac{1}{z_1-z_2},\quad \mathrm{Res}(z_2)=\frac{1}{z_2-z_1},$$

perciò l'integrale è nullo.

---

*) Sia

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\le 2\}\ ;$$

calcolare

$$\int_{+\partial\Omega}\frac{dz}{z^2-(3+2i)z+1+3i}\ .$$

....

Risposta: $-2\pi\ i$.

---

*) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z=0$ della funzione

$$f(z)=\frac{1}{z^4(z+2)}\ ;$$

utilizzare tale sviluppo per determinare il residuo di f in $z = 0$.

. . . .

Si ha

$$\frac{1}{z^4(z+2)} = \frac{1}{2z^4}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^{n-4} = \frac{1}{32}\sum_{k=-4}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}z^k.$$

In particolare il residuo di f in $z = 0$ vale $-1/16$.

---

*) Determinare la serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pari e periodica di periodo 2π, tale che

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } \ x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right) \\ 1 & \text{se } \ x \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]. \end{cases}$$

. . . .

Poiché f è pari, si ha

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = -1, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\ dx \\ &= -\frac{4}{n\pi}\sin(n\pi/2) - \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -\frac{6}{(2k+1)\pi}(-1)^k & n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos((2k+1)x).$$

---

*) Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}.$$

. . . .

Per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\ dx = \int_0^{\infty} e^{-(2+i\omega)x}\ dx = \frac{e^0}{2+i\omega} - \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-(2+i\omega)x}}{2+i\omega} = \frac{1}{2+i\omega}.$$

---

*) Determinare la trasformata di Laplace (unilatera) della funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,2) \cup (4,\infty) \\ 3 - x & x \in [2,4] \end{cases}.$$

. . . .

Risposta: $\frac{e^{-4p}}{p^2}(1+p+e^{2p}(p-1))$.