ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA PRATICA — 06.07.11 .

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

(1) Determinare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) - x^2 - y$$

e stabilirne la natura.

.... 7 punti

Risposta:

$(0,2)$ punto di massimo locale, $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2)$ punti di sella.

....

Svolgimento:

Si ha

$$\begin{cases} f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2x = 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2} - 1\right) = 0 \\ f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{2}{y} - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Perciò i punti critici sono $(0,2)$, $(\sqrt{3}2, 1/2)$ e $(-\sqrt{3}2, 1/2)$. Si ha

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} - 2 & \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Valutandolo nei punti critici si ottiene la risposta.

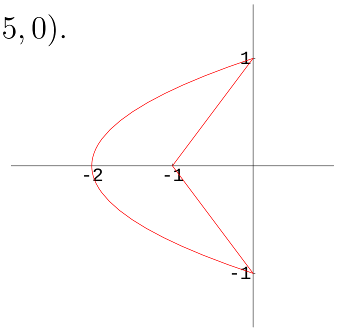
(2) Disegnare l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y):\ 2(y^2-1) \leq x \leq |y|-1\right\}$$

e calcolarne il baricentro.

. . . . 7 punti

Risposta: $(x_b, y_b) = (-27/25, 0)$.



. . . .

Svolgimento:

La rappresentazione di Ω segue dal grafico delle due funzioni elementari $y \mapsto 2(y^2-1)$ e $y \mapsto |y|-1$. Per simmetria, $y_b = 0$. Si ha

$$|\Omega| = 2\int_0^1 \int_{2(y^2-1)}^{y-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 (1+y-2y^2)\mathrm{d}y = 2(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}) = \frac{5}{3},$$

da cui

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{6}{5}\int_0^1 \int_{2(y^2-1)}^{y-1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{5}\int_0^1 ((y-1)^2 - 4(y^2-1)^2)\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{5}\int_0^1 (-2y-4y^4+9y^2-3)\mathrm{d}y = \frac{3}{5}\left(-1-\frac{4}{5}+3-3\right) = -\frac{27}{25}. \end{aligned}$$

(3) Determinare una parametrizzazione $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ della superficie

$$\Sigma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x^8 + y^2 + 4z^2 = 6\big\}$$

e determinare il piano tangente e i due versori normali a Σ in $(1, 1, 1)$.

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

Parametrizzazione: $D = \{(u, v) : \ u^2 + 4v^2 \leq 6\}$, $\quad \sigma(u, v) = ((6 - u^2 - 4v^2)^{1/8}, u, v)$

Piano tangente: $x - 1 + (y - 1)/4 + z - 1 = 0$

Versori normali: $\mathbf{n} = \pm\frac{4}{\sqrt{33}}(1, 1/4, 1)$

. . . .

Svolgimento:

Si può parametrizzare Σ come superficie cartesiana rispetto a qualunque asse. Per esempio, poiché $x \geq 0$,

$$x = (6 - y^2 - 4z^2)^{1/8} =: f(y, z), \quad 6 - y^2 - 4z^2 \geq 0,$$

pertanto

$$D = \{(u, v) : \ u^2 + 4v^2 \leq 6\}, \quad \sigma(u, v) = ((6 - u^2 - 4v^2)^{1/8}, u, v).$$

Poiché si tratta di una superficie cartesiana, il piano tangente e i versori normali sono dati rispettivamente da

$$x - 1 - f_y(1, 1)(y - 1) - f_z(1, 1)(z - 1) = 0, \quad \mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}}(1, -f_y, -f_z).$$

Poiché

$$f_y(y, z) = -\frac{1}{4}(6 - y^2 - 4z^2)^{-7/8}, \quad f_z(y, z) = -(6 - y^2 - 4z^2)^{-7/8},$$

si ha $f_y(1, 1) = -1/4$, $f_z(1, 1) = -1$, da cui segue la risposta.

(4) Sia

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(1 - t^2 - \cos(\pi t^3), \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - t^2 + 5\right).$$

Calcolare

$$\int_\gamma \left(\frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + e^y \arctan x\,\mathrm{d}y\right).$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$\frac{\pi e^5}{4}$$

. . . .

Svolgimento:

Verifichiamo che la forma differenziale è esatta:

$$U(x,y) = \int \frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = e^y \arctan x + C(y)$$

da cui

$$U_y = e^y \arctan x + C'(y) \stackrel{!}{=} e^y \arctan x \quad \Longleftrightarrow \quad C'(y) = 0,$$

ovvero

$$U(x,y) = e^y \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Perciò, osservando che $\gamma(1) = (1,5)$ e $\gamma(0) = (0,5)$, si ottiene

$$\int_\gamma \left(\frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + e^y \arctan x\,\mathrm{d}y\right) = U(1,5) - U(0,5) = \frac{\pi e^5}{4}.$$

(5) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x^2y''(x) + \tfrac{1}{3}xy'(x) + \tfrac{1}{9}y(x) = \log x, \quad x > 0.$$

. . . . 8 punti

Risposta:

$$y(x) = (c_0 + c_1 \log x)\, x^{1/3} + 9 \log x + 54.$$

. . . .

Svolgimento:

L'equazione assegnata una equazione di Eulero. Ponendo

$$x = e^t \iff t = \log x, \quad u(t) = y(e^t),$$

l'equazione differenziale per $u(t)$ diventa

$$u''(t) - \frac{2}{3}u'(t) + \frac{1}{9}u(t) = t.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$, per cui l'integrale generale dell'omogenea associata risulta essere

$$u_o(t) = (c_0 + c_1 t)\, e^{t/3}.$$

Per determinare una soluzione particolare si utilizza il metodo di somiglianza:

$$u_p(t) = At + B, \quad y_p'(t) = A, \quad y_p''(t) = 0,$$

da cui segue che

$$u_p''(t) - \frac{2}{3}u_p'(t) + \frac{1}{9}u_p(t) = -\frac{2}{3}A + \frac{1}{9}At + \frac{1}{9}B \overset{!}{=} t \iff A = 9,\ B = 54.$$

Da ci segue che l'integrale generale nell'incognita $u(t)$

$$u(t) = (c_0 + c_1 t)\, e^{t/3} + 9t + 54$$

e sostituendo $t = \log x$ si ottiene la risposta.