ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA PRATICA — 12.01.12 | A |
|---|

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente e completamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

VERSIONE PRELIMINARE

(1) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}y, \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta:

$\max f = 3/8$, $\min f = -3/4$.

....

Svolgimento:

Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \iff (x,y) = (0,1),$$

quindi f non ha punti critici interni. Perciò il massimo e il minimo (che esistono per il Teorema di Weierstrass) sono assunti su $\partial\Omega$. Posto

$$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}y + \lambda(1 - x^2 - y^2),$$

si ha

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \left(\frac{x}{2} - 2\lambda x, -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} - 2\lambda y, 1 - x^2 - y^2\right) = \mathbf{0}$$

se e solo se

$$x = 0,\ y = \pm 1 \quad \text{oppure} \quad (\lambda = 1/4,)\ y = 1/2,\ x = \pm\sqrt{3}/2.$$

Si ha

$$f(0,1) = 1/4,\ f(0,-1) = -3/4,\ f(\pm\sqrt{3}/2, 1/2) = 3/8,$$

da cui segue la risposta.

Per studiare f su $\partial\Omega$ si può in alternativa considerare la funzione

$$g(y) = f(1 - y^2, y) = \frac{1}{4}(1 - 2y^2 + 2y), \quad y \in [-1,1]$$

e osservare che g ha massimo assoluto in $y = 1/2$ e minimo assoluto in $y = -1$, oppure passare in coordinate polari.

(2) Calcolare

$$\int_{\partial\Omega^+} xy\ \mathrm{d}y, \quad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\geq 0,\ y\leq 5x,\ y\leq \frac{7}{x}-2\right\}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\frac{80}{3} - 14\log\frac{7}{2}$.

. . . .

Svolgimento:

Segue dalle formule di Green che

$$I = \int_{\partial\Omega^+} xy\ \mathrm{d}y = \iint_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

L'insieme Ω è semplice rispetto a entrambi gli assi:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,7/2], 0\leq y\leq \min\left\{5x, \frac{7}{x}-2\right\}\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[0,5], \frac{y}{5}\leq x\leq \frac{7}{y+2}\right\}.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \int_0^1\int_0^{5x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^{7/2}\int_0^{7/x-2} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad \text{oppure} \quad I = \int_0^5\int_{y/5}^{7/(y+2)} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

e svolgendo correttamente gli integrali si ottiene la risposta.

(3) Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 < 0\}$$

e determinare il valore di $A \in \mathbb{R}$ per cui la forma differenziale

$$\omega = \frac{A(x-1)\mathrm{d}x + 2(y-2)\mathrm{d}y}{4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4}$$

è esatta in D.

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

D è l'interno dell'ellisse di centro $(1, 2)$ e semiassi paralleli agli assi, di lunghezza 1 e 2.

$A = 8$.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4,$$

da cui segue la caratterizzazione di D. Dalla precedente identità segue anche facilmente che ω è esatta se e solo se $A = 8$ in tal caso una primitiva di ω è

$$U(x, y) = \log|4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4|.$$

(4) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

e utilizzarlo per calcolare la somma della seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

....

Svolgimento:

(5) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = (x + 3y(x) - 2)^2 - \frac{1}{3} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

. . . .

Svolgimento: