ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA SCRITTA — 07.06.12

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore e 15 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare il baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le y \le \sqrt{|x|+2}\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta:

$$\left(0, \frac{5}{2(5-2\sqrt{2})}\right).$$

....

Svolgimento: Il dominio è simmetrico rispetto a $x = 0$ perché le funzioni $x \mapsto |x|$ e $x \mapsto \sqrt{|x|+2}$ sono pari. Quindi $x_b = 0$ e

$$|\Omega| = 2|\Omega_1|, \quad y_b = \frac{1}{|\Omega_1|} \iint_{\Omega_1} y \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ x \le y \le \sqrt{x+2}\}.$$

Si verifica facilmente che, per $x \ge 0$, $x \le \sqrt{x+2}$ se e solo se $x \le 2$. Pertanto

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,2],\ x \le y \le \sqrt{x+2}\}$$

e quindi

$$|\Omega_1| = \int_0^2 \int_x^{\sqrt{x+2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(5-2\sqrt{2})$$

$$y_b = \frac{3}{2(5-2\sqrt{2})} \int_0^2 \int_x^{\sqrt{x+2}} y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{5}{2(5-2\sqrt{2})}.$$

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = 3x^3 + y^3$.

(a) Determinare la natura dei punti critici.

(b) Determinare i punti di massimo assoluto e i punti di minimo assoluto di f nel seguente insieme:

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x^4 + y^4 \leq 1\right\}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

(a) $(0, 0)$ punto di sella; (b) $\max_K f = \sqrt{2}$, $\min_K f = -\sqrt{2}$.

. . . .

Svolgimento:

(a) Si verifica facilmente che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$. Poiché $f(0, 0) = 0$, si ha

$$f(x, y) - f(0, 0) = (3^{1/3}x + y)\underbrace{(3^{2/3}x - 3^{1/3}xy + y^2)}_{>0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2} \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{1/3}x \gtreqless -y,$$

quindi $(0, 0)$ è un punto di sella (per esempio, $f(0, y) - f(0, 0) \gtreqless 0$ se e solo se $y \gtreqless 0$).

(b) Sia

$$L(x, y, \lambda) = 3x^3 + y^3 - \lambda(3x^4 + y^4 - 1).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} L_x = 9x^2 - 12\lambda x^3 = 3x^2(3 - 4\lambda x) = 0 \\ L_y = 3y^2 - 4\lambda y^3 = y^2(3 - 4\lambda y) = 0 \\ L_\lambda = 1 - 3x^4 - y^4 = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$(x, y) = (\pm 1/3^{1/4}, 0) \ \text{ oppure } \ (x, y) = (0, \pm 1) \ \text{ oppure } \ (x, y) = \pm(1, 1)/\sqrt{2}.$$

Valutando la funzione in tali punti si ottiene, rispettivamente,

$$\pm 3^{1/4},\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2},$$

da cui segue la risposta ($3^{1/4} < 2^{1/2}$ visto che $3 < 4$).

(3) Sia Σ^+ la superficie definita da

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = xy,\, x^2 + y^2 \le 1,\, y \ge \sqrt{3}x\right\}$$

e orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_3 < 0$.

(a) Calcolare l'area di Σ.

(b) Calcolare la circuitazione del vettore $\mathbf{v} = (x, 0, y)$ lungo $\partial\Sigma^+$.

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

(a) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; (b) $1/3$.

....

Svolgimento:

Σ è una superficie cartesiana parametrizzata da

$$\sigma(u, v) = (u, v, uv), \quad D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 1,\ v \ge \sqrt{3}u\}.$$

Si ha quindi

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-v, -u, 1), \quad |\sigma_u \wedge \sigma_v| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}.$$

Perciò la risposta ad (a) è

$$|\Sigma| = \iint_D \sqrt{1 + u^2 + v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\pi/3}^{4\pi/3} \int_0^1 \rho\sqrt{1 + \rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Per (b), si osserva che versori normali sono

$$\pm\frac{(-v, -u, 1)}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$$

e quello tale che il prodotto scalare con $\mathbf{e}_3$ è negativo è

$$\mathbf{n}^+ := \frac{(v, u, -1)}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}.$$

Si osserva inoltre che

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = (1, 0, 0), \quad \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^+ = \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}.$$

Applicando il teorema del rotore, si conclude che la circuitazione vale

$$\iint_D v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\pi/3}^{4\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}.$$

(4) Determinare (purché esistano) i valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \beta - 2\sin(2x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta \end{cases} .$$

è periodica di periodo π.

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\alpha = \beta = -\frac{4}{3}$.

....

Svolgimento:

L'equazione assegnata è lineare. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Di conseguenza l'integrale generale dell'omogenea associata è:

$$y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Per determinare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza:

$$y_p(t) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + C.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ricava che $A = 0$, $B = 2/3$ e $C = \beta$, per cui l'integrale generale risulta essere:

$$y_{\text{gen}}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{2}{3}\sin(2x) + \beta.$$

Imponendo poi le condizioni iniziali si ha che

$$\begin{cases} c_2 + \beta = \alpha \\ -c_1 - \frac{4}{3} = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -\beta - \frac{4}{3} \\ c_2 = \alpha - \beta \end{cases}$$

da cui si ricava che la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \left(-\beta - \frac{4}{3}\right)\cos x + (\alpha - \beta)\sin x + \frac{2}{3}\sin(2x) + \beta$$

Annullando infine i coefficienti delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$, uniche a non essere π-periodiche, si ottiene la risposta.

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

(A.1) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia ω una forma differenziale di classe $C^1(A)$. Dimostrare che se ω è esatta in A, allora è chiusa in A.

(A.2) Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in (x_0, y_0). Utilizzando la definizione, calcolare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t^2, y_0 e^t)$ nel punto $t = 0$.

.... $\boxed{\text{8 punti}}$

Risposte: