ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA SCRITTA — 11.09.12

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore e 15 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)(x + y)$$

e sia

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0\}.$$

Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di f in Ω.

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\max_{\Omega} f = f(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \quad \min_{\Omega} f = f(0, -1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$

....

Svolgimento:

I punti critici interni si determinano risolvendo

$$\nabla f = (-2x(x+y) + 1 - x^2 - y^2, -2y(x+y) + 1 - x^2 - y^2) \overset{!}{=} (0,0).$$

Sottraendo le due equazioni e svolgendo semplici calcoli, si ottiene che l'unico punto critico *interno* ad Ω è $P_1 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$. Per quanto riguarda $\partial\Omega$, si ha

$$f|_{\Gamma_1} \equiv 0, \quad \Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x^2 + y^2 = 1\}$$

mentre su $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \{x = 0\}$ si studia la funzione

$$g : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad g(y) := f(0,y) = y(1 - y^2)$$

e si verifica che $y = -1$ e $y = 1/\sqrt{3}$ sono punti di massimo locale per g in $[-1,1]$, mentre $y = -1/\sqrt{3}$ e $y = 1$ sono punti di minimo locale. Confrontando i valori dei candidati ottenuti si ottiene la risposta.

(2) Calcolare

$$I = \iiint_\Omega (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le z \le x-y\}.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

0

....

Svolgimento:

Primo metodo. Ponendo $u = x+y$ e $v = x-y$, si ottiene

$$I = -\frac{1}{2}\iiint_T u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z, \quad T = \{(u,v,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{1}{2}(u^2+v^2) \le z \le v\}$$

e il risultato segue poiché l'integranda è dispari rispetto a $u = 0$ e il dominio è simmetrico rispetto ad $u = 0$.

Secondo metodo. Passando in coordinate cilindriche, si ottiene

$$I = \iiint_S r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,$$

dove

$$S = \{(r,\varphi,z) \in [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} :\ r^2 \le z \le r(\cos\varphi - \sin\varphi)\}.$$

Si ha

$$r^2 \le r(\cos\varphi - \sin\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad r \le \cos\varphi - \sin\varphi,$$

perciò, integrando per fili,

$$I = \iint_E \left(\int_{r^2}^{r(\cos\varphi - \sin\varphi)} r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\mathrm{d}z\right),$$

dove

$$E = \{(r,\varphi) :\ \varphi \in [-\pi,\pi],\ 0 \le r \le \cos\varphi - \sin\varphi\}.$$

Si ha

$$0 \le \cos\varphi - \sin\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in [-3\pi/4, \pi/4].$$

Perciò

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\cos\varphi - \sin\varphi} r^3(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi - r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{20}(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi)^5\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{120}(\cos\varphi - \sin\varphi)^6\Big|_{-3\pi/4}^{\pi/4} = 0. \end{aligned}$$

Naturalmente i due metodi presentati non sono i soli: si può anche integrare per fili prima di passare in coordinate cilindriche, oppure osservare le proprietà di simmetria in qualunque momento del procedimento.

(3) Sia

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{x^2+y^2+1} + 3x\right)\mathrm{d}y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^7 - t, t^2)$. Calcolare

$$\int_\gamma \omega \ .$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\log 2 - \frac{4}{3}$.

. . . .

Svolgimento:

La forma differenziale

$$\omega_1(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}y$$

è esatta in $\mathbb{R}^2$, con funzione potenziale

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2).$$

Perciò

$$\int_\gamma \omega = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) + \int_\gamma 3x\mathrm{d}y = \log 2 + 6\int_0^1 (t^8 - t^2)\mathrm{d}t = \log 2 - \frac{4}{3}.$$

(4) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y'(x) + x^2 y(x) = e^{x^3} y^4(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(si suggerisce di utilizzare la sostituzione $u(x) = (y(x))^{-3}$).

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

....

Svolgimento:

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

(A.1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare a tratti di area 1 e sia $u : C^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ tale che $\Delta u(x, y) = 3$ per ogni $(x, y) \in \Omega$. Calcolare

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n}_e \, \mathrm{d}s.$$

(A.2) Sia f una funzione continua 2π-periodica e sia

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

il suo sviluppo in serie di Fourier. Dimostrare che se f è pari allora $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$.

. . . . 8 punti

Risposte: