ANALISI MATEMATICA 1 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 12.06.2015

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^{4x} - 4e^{x-1}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

.... 7 punti

Risposta:
$\sup f = 0$, $\inf f = f(-1/3)$, $x = 0$ punto di massimo locale, $x = -1/3$ punto di minimo locale (e assoluto).

....

Svolgimento:
Si ha

$$f'(x) = 4e^{4x} - 4e^{x-1} = 4e^{x-1}(e^{3x+1} - 1) \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr -1/3,$$

quindi $x = -1/3$ è punto di minimo locale, $x = 0$ è punto di massimo locale, e $\inf f = f(-1/3)$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 > f(0) = 1 - 4/e,$$

quindi $\sup f = 0$.

(2) Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 9^k}{2k+3} x^{2k}.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:
$|x| \leq 1/3$.

....

Svolgimento:
Si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(-1)^k 9^k}{2k+3} x^{2k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(-1)^k (9x^2)^k}{2k+3} \begin{cases} = 0 & \text{se } |x| \leq 1/3 \\ \nexists & \text{se } |x| > 1/3 \end{cases}$$

quindi la serie non converge se $|x| > 1/3$. Per $|x| \leq 1/3$ si studia prima la convergenza assoluta utilizzando il criterio del rapporto. Si ha

$$\left| \frac{(-1)^k 9^k}{2k+3} x^{2k} \right|^{1/k} = \frac{9x^2}{(2k+3)^{1/k}} \to 9x^2 \quad \text{per} \quad k \to +\infty,$$

quindi la serie è assolutamente convergente per $|x| < 1/3$. Infine, per $|x| = 1/3$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 9^k}{2k+3} (1/3)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3}$$

che converge per il criterio di Leibnitz.

Si noti che si può anche utilizzare il criterio di Leibnitz per $|x| < 1/3$, osservando che sia $(9x^2)^k$ che $1/(3k+2)$ sono successioni positive e decrescenti, quindi anche il loro prodotto è decrescente.

(3) Determinare, purché esista, il valore del seguente integrale improprio:

$$\int_3^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-4} - 1 \right) \mathrm{d}x.$$

.... 6 punti

Risposta:
$\log 5$.

....

Svolgimento:
Si ha:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2}{x^2-4} - 1 \right) \mathrm{d}x &= \int \frac{4}{x^2-4} \mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_3^M \left(\frac{x^2}{x^2-4} - 1 \right) \mathrm{d}x = \log \left| \frac{M-2}{M+2} \right| - \log \left| \frac{1}{5} \right|$$

e passando al limite per $M \to +\infty$ si ottiene la risposta.

(4) Determinare (purché esista) il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il seguente limite esiste finito e non zero:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha}\left(2\cos(\log(1+x)) + (e^x-1)^2 - 2\right).$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:
$\alpha = 3$.

....

Svolgimento:
Si ha

$$\begin{aligned}
2\cos(\log(1+x)) + (e^x-1)^2 - 2 &= 2\cos(x - x^2/2 + o(x^2)) + (x + x^2/2 + o(x^2))^2 - 2 \\
&= -(x - x^2/2 + o(x^2))^2 + o(x^4) + (x + x^2/2 + o(x^2))^2 \\
&= -x^2 + x^3 + o(x^3) + x^2 + x^3 \\
&= 2x^3(1 + o(1)) \quad \text{per } x \to 0^+,
\end{aligned}$$

da cui segue la risposta.

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

(A.1) Siano $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$. Dire quanto vale $(f(x)g(x))'$ e dimostrarlo.

(A.2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente. Dire, giustificando la risposta, se la funzione

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(g(x)) - f(x)$$

è monotona crescente, monotona decrescente oppure non ha alcun carattere di monotonia.

.... 7 punti

Svolgimento: