ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 21.02.2019

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Calcolare il baricentro del seguente insieme:

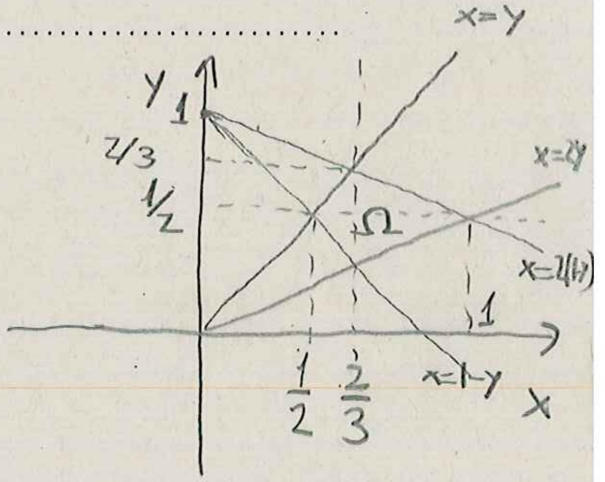
$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \le x \le 2y, \ \ 1-y \le x \le 2(1-y) \}.$$

6 punti

Risposta:

$$(x_B, y_B) = \left(\frac{13}{18}, \frac{1}{2}\right)$$

Svolgimento:



Per simmetria, $y_B = \frac{1}{2}$.

$y = 2(1-y) \iff y = 2-2y \iff y = \frac{2}{3}$

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

$$x_B = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega x\,dx\,dy = 12\cdot 2\int_{1/2}^{2/3}\int_{y}^{2(1-y)} x\,dx\,dy$$

$$= 12\int_{1/2}^{2/3}\left[4(1-y)^2 - y^2\right]dy = 12\int_{1/2}^{2/3}(4-8y+3y^2)\,dy$$

$$= 12\left[4y - 4y^2 + y^3\right]_{1/2}^{2/3} = 12\left[\frac{8}{3} - \frac{16}{9} + \frac{8}{27} - 2 + 1 - \frac{1}{8}\right]$$

$$= 12\left[\frac{72-48+8}{27} - \frac{9}{8}\right] = 12\left[\frac{32}{27} - \frac{9}{8}\right] = \frac{13}{18}$$

(2)

a) Determinare $A \in \mathbb{R}$ in modo tale che il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y) = (\ 2x - 4x^3 - 4xy^2\ ,\ 2y - 4y^3 - Ax^2y\ )\,.$$

sia conservativo in $\mathbb{R}^2$;

b) per tale valore di A, determinare i punti di massimo locale della funzione potenziale.

.... 6 punti

Risposta: a) $A=4$

b) $\{ x^2+y^2 = \frac{1}{2} \}$

....

Svolgimento:

$$U(x,y) = \int (2x - 4x^3 - 4xy^2)\,dx = x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + C(y)$$

$$U_y(x,y) = -4x^2y + C'(y) \overset{?}{=} 2y - 4y^3 - Ax^2y$$

$$\Leftrightarrow \quad A=4, \quad C'(y) = 2y - 4y^3 \Rightarrow C = y^2 - y^4$$

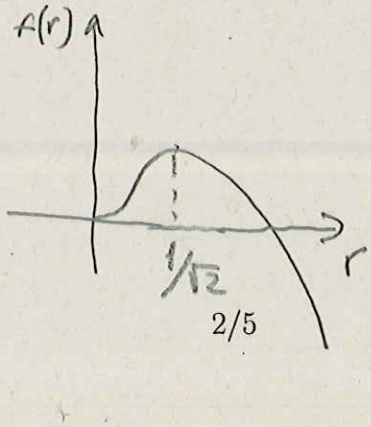
Quindi $A=4$ e

$$U(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4$$
$$= (x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$$

U è radiale : $U(x,y) = f(r)$, $f(r) = r^2 - r^4$

$r \doteq \sqrt{x^2+y^2}$

$f'(r) = 2r - 4r^3 = 0 \Leftrightarrow r=0,\ r = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Quindi i punti di massimo locale (e assoluto) sono

$$\{ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \}$$

In alternativa si può studiare direttamente:

$$\begin{cases} U_x = 2x - 4x^3 - 4xy^2 = 2x(1 - 2x^2 - 2y^2) = 0 \\ U_y = 2y - 4y^3 - 4x^2y = 2y(1 - 2x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

$\iff \quad (x,y) = (0,0)$ oppure $(x,y) \in \{x^2+y^2 = 1/2\} =: \Gamma$

$$D^2U(x,y) = \begin{pmatrix} 2-12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 2-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

$D^2U(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0)$ pto di min. loc.

$D^2U|_\Gamma = \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} \qquad \det D^2U|_\Gamma = 64x^2y^2 - 64x^2y^2 \equiv 0$

$$U - U|_\Gamma = x^2+y^2 - (x^2+y^2)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\left[(x^2+y^2) - 1/2\right]^2 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow \Gamma$ punti di massimo locale e assoluto.

$y = f(z)$

(3) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(z) = 1 - z^2$ e sia $\Sigma^+ \subset \mathbb{R}^3$ la superficie ottenuta ruotando il grafico di ~~y~~ di un angolo 2π intorno all'asse z, orientata in modo che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 \geq 0$. Calcolare la circuitazione intorno a $\partial\Sigma^+$ del campo vettoriale

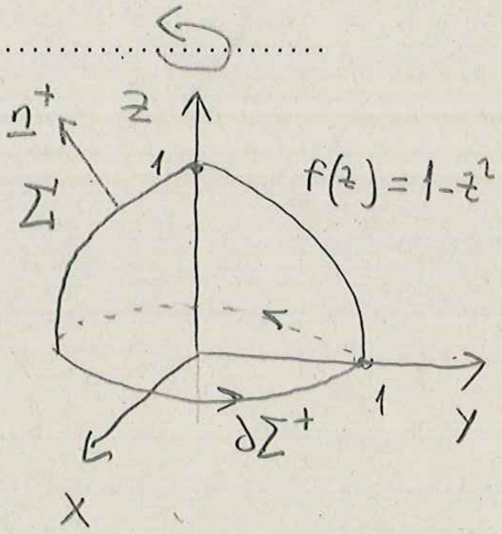
$$\mathbf{V} = (\ -y(x^2+y^2),\ x(x^2+y^2)\ ,\ 0\ ).$$

.... 6 punti

Risposta: $+2\pi$.

....

Svolgimento:



Si può sia utilizzare il teorema del rotore, sia la definizione. Poiché si vede subito che

$$\partial\Sigma^+ = \gamma \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

conviene usare il calcolo diretto (ma l'altra strada non è difficile).

$$\int_{\partial\Sigma^+} \underline{V} \cdot \underline{t}^+ \, ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{= \dot\gamma / |\dot\gamma|} \underbrace{|\dot\gamma|}_{=1} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} +1 \, dt = +2\pi.$$

(4) Un punto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ si muove nel piano partendo dal punto $(1,1)$ con velocità
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t) = -\|\gamma(t)\|^{-4}\gamma(t)$$
e si ferma quando raggiunge $(0,0)$.

a) Dopo quanto tempo si ferma?

b) Qual è stata la lunghezza del suo percorso?

[SUGG: QUALE EDO SODDISFA IL QUADRATO DELLA DISTANZA DEL PUNTO DA (0,0)?] 6 punti

Risposta:

a) $t = 1$

b) $L = \sqrt{2}$

Svolgimento:

$$\frac{d}{dt}\frac{\|\gamma(t)\|^2}{2} = \gamma(t)\cdot\frac{d}{dt}\gamma(t)$$
$$= -\|\gamma(t)\|^{-4}\,\gamma(t)\cdot\gamma(t) = -\|\gamma(t)\|^{-2}$$

$$z(t) = \|\gamma(t)\|^2$$

$$\frac{1}{2}z'(t) = -\frac{1}{z(t)} \qquad \frac{1}{2}z(t)\,z'(t) = -1$$
$$\frac{z^2(t)}{4} = -t + C$$

$$z(0) = \|(1,1)\|^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = C$$

$$z^2(t) = 4(1-t)$$

a) $z^2(t) = 0 \iff t = 1$

b) $$\int_0^1 \|\dot\gamma\|\,dt = \int_0^1 \|\gamma\|^{-3}\,dt = \int_0^1 (4(1-t))^{-3/4}\,dt$$
$$= 4^{-3/4}\cdot 4\,(1-t)^{1/4}\Big|_0^1 = (4)^{1/4} = \sqrt{2}$$