ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 19.09.2019 A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^4 - 3xy^3 + \frac{9}{4}y^4 - 2x^2$.

a) Determinare i punti stazionari di f.

b) Detto P il punto stazionario che ha minima distanza dall'origine, stabilire la natura di P.

6 punti

Risposta: a) $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $\pm(2,2)$

b) $P=(0,0)$ punto di sella

Svolgimento:

a)
$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 3y^3 - 4x \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y = -9xy^2 + 9y^3 = 9y^2(y-x) \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 4x^3 - 3x^3 - 4x = 0 \\ y = x \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari sono $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $\pm(2,2)$.

b) Tra i punti stazionari, quello che ha minima distanza da $(0,0)$ è $(0,0)$ stesso. Si ha

$$D^2 f\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & -9y^2 \\ -9y^2 & -18xy + 27y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi si deve usare la definizione. Si ha

$$f(0,y) = \frac{9}{4}y^4 > 0 \quad \text{per } y \neq 0$$

$$f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0 \quad \text{per } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$$

quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

(2) Per ciascun valore di $\alpha \geq 0$, determinare quali sono le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = -3$$

tali che $\lim_{x \to +\infty} y(x)$ esiste finito. Per tali soluzioni, dire quanto vale tale limite.

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: $y(x) = Ce^{-\alpha x} + \frac{3}{\alpha^2}$, $\alpha > 0$

$\ell = 3/\alpha^2$

. . . .

Svolgimento:

Se $\underline{\alpha = 0}$, $y''(x) = -3 \iff \underline{y(x) = -\frac{3}{2}x^2 + Ax + B}$

e il limite non è mai finito.

Se $\underline{\alpha > 0}$:

omogenea: $\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \iff \lambda = \pm\alpha$

$$y_0(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

soluzione particolare: $y_p(x) = \frac{3}{\alpha^2}$

Quindi $\underline{y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + \frac{3}{\alpha^2}}$

e le soluzioni con limite finito sono tutte e sole quelle che hanno $C_1 = 0$ e il limite in tal caso vale $3/\alpha^2$.

(3) Sia Ω l'insieme ottenuto ruotando l'insieme

$$E = \left\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2 - y \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}\right\}$$

di un angolo 2π intorno all'asse z.

a) Calcolare l'area di $\partial\Omega$ e il volume di Ω.

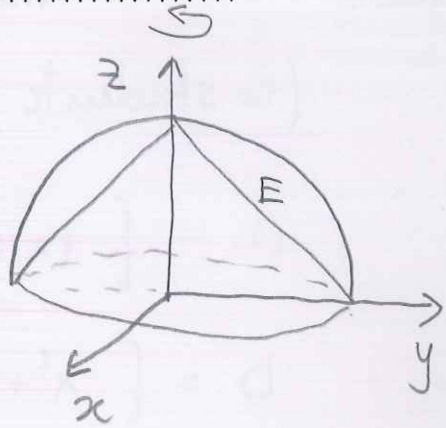
b) Calcolare il baricentro di Ω.

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: a) $|\partial\Omega|_2 = 4\pi(2+\sqrt{2})$, $|\Omega|_3 =$

b) $\underline{x}_B = (0, 0, 1)$

Svolgimento:



a) Area della semisfera: $\dfrac{4\pi\, 2^2}{2} = 8\pi$

Area del cono: $\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{8} = 4\pi\sqrt{2}$

Quindi $|\partial\Omega|_2 = 8\pi + 4\pi\sqrt{2}$

(altrimenti si procede col calcolo di integrali di superficie)

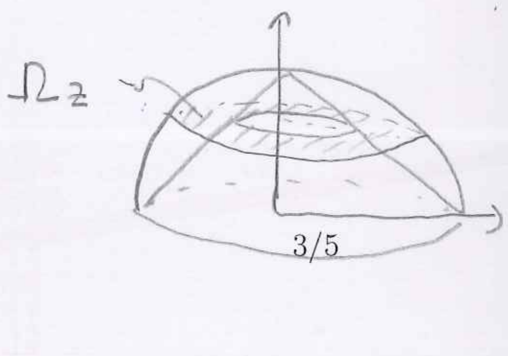
Volume della semisfera: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi\, 2^3 = \dfrac{16\pi}{3}$

Volume del cono: $\dfrac{1}{3}\pi\, 2^2 \cdot 2 = \dfrac{8}{3}\pi$

Quindi $|\Omega|_3 = \dfrac{16}{3}\pi - \dfrac{8}{3}\pi = \dfrac{8}{3}\pi$

(altrimenti si procede col calcolo di integrali tripli)

b) Integrazione per strati:



$$z_B = \frac{3}{8\pi} \int_0^2 z\, |\Omega_z|\, dz$$

$$= \frac{3}{8\pi} \int_0^2 z\left(\pi(4-z^2) - \pi(2-z)^2\right) dz$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^2 (4z^2 - 2z^3)\, dz = \frac{3}{8}\left[\frac{4}{3}z^3 - \frac{z^4}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{32}{3} - 8\right] = 1 \implies \underline{x}_B = (\underbrace{0,0}_{\text{per simmetria}},1)$$

$\boxed{\text{NB}}$ Alternativamente, si può integrare per fili (lo studente controlli):

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in D,\ 2 - \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \right\}$$

$$D = \{ x^2 + y^2 \le 4 \}$$

$$z_B = \frac{3}{8\pi} \iint_D \left(\int_{2-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\, dz \right) dx\,dy = \dots = 1.$$

(4) Sia $\Omega = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$. Per $A \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{V}_A : \Omega \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}_A = \left(\frac{y}{1+xy} + Ay \, , \, \frac{x}{1+xy} + x \right).$$

a) Determinare (purché esistano) i valori di A per cui $\mathbf{V}_A$ è conservativo in Ω; per tali valori, determinare una funzione potenziale.

b) Determinare (purché esistano) i valori di A per cui è nullo il lavoro di $\mathbf{V}_A$ lungo il segmento di estremi $(1,1)$ e $(2,2)$.

6 punti

Risposta: a) $A = 1$, $U(x,y) = \log(1+xy) + xy$

b) $A = -1 - \frac{2}{3}\log\frac{5}{2}$.

Svolgimento:

a) $U(x,y) = \int \left(\frac{x}{1+xy} + x \right) dy = \log(1+xy) + xy + C(x)$

$U_x = \frac{y}{1+xy} + y + C'(x) \overset{!}{=} \frac{y}{1+xy} + Ay$

$\iff C'(x) = 0, \ A = 1.$

b) $\underline{V}_A = \underbrace{\underline{V}_1}_{\text{conservativo}} + ((A-1)y, 0)$

$\gamma(t) = (t,t), \quad t \in [1,2]$

$$\int_\gamma \underline{V}_A \cdot d\underline{x} = \int_\gamma \underline{V}_1 \cdot d\underline{x} + \int_\gamma ((A-1)y, 0) \cdot (dx, dy)$$

$$= U(2,2) - U(1,1) + \int_1^2 (A-1)\, t \, dt$$

$$= \log 5 + 4 - \log 2 - 1 + \frac{3}{2}(A-1) \overset{!}{=} 0$$

$\iff \frac{3}{2}(A-1) = -\log\frac{5}{2} - 3$