ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.02.2020

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} 2\,y(x)\,y'(x) = (5 - y^2(x))^2 \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

6 punti

Risposta: $y(x) = -\sqrt{5 - \frac{1}{x+1}}$, $x \in \left(-\frac{4}{5}, +\infty\right)$

Svolgimento:

Per separazione di variabili:

$$(5-y^2)^{-1} = \int \frac{2yy'}{(5-y^2)^2}\,dx = \int 1\,dx = x + C$$

Sostituendo la C.I., $(5-(-2)^2)^{-1} = 0 + C \iff C = 1$

Quindi

$$5 - y^2 = \frac{1}{x+1} \iff y^2 = 5 - \frac{1}{x+1}$$

$$\iff y = \pm\left(5 - \frac{1}{x+1}\right)^{1/2}$$

e poiché $y(0) = -2$, si sceglie il segno negativo.

Infine $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 5 - \frac{1}{x+1} \geq 0 \end{cases} \iff x \geq -\frac{4}{5}$

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = x^6 y^3 + 2x^5 y^4 - x^4 y^3.$$

a) Determinare i punti critici di f.

b) Stabilire la natura di $(0, 0)$ senza usare la matrice hessiana (che si annulla).

$\boxed{\text{4+2 punti}}$

Risposta: (a) $(x,0)\ \forall x$, $(0,y)\ \forall y$, $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

(b) punto di sella

Svolgimento:

(a)
$$\begin{cases} f_x = 6x^5y^3 + 10x^4y^4 - 4x^3y^3 = 2x^3y^3(3x^2 + 5xy - 2) = 0 \\ f_y = 3x^6y^2 + 8x^5y^3 - 3x^4y^2 = x^4y^2(3x^2 + 8xy - 3) = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} x = 0 \\ \forall y \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \forall x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2 = 0 \\ 3x^2 + 8xy - 3 = 0 \end{cases}$$

Per l'ultimo sistema: per sottrazione $3xy = 1 \iff y = \frac{1}{3x}$, e sostituendo nella prima equazione $3x^2 + \frac{5}{3} - 2 = 0$, ovvero $x = \pm \frac{1}{3}$.

(b) $f(x,y) - f(0,0) = x^4y^3(\underbrace{x^2 + 2xy - 1}_{\sim -1}) \sim -x^4y^3$ per $(x,y) \to (0,0)$.

Quindi $\operatorname{sgn}(f(x,y) - f(0,0)) = \operatorname{sgn}(-y^3)$ in $\mathcal{U}(0,0)$ e $(0,0)$ è un punto di sella.

(3) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando l'insieme

$$E = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3 \leq y \leq 4 - z^2\}$$

di un angolo giro intorno all'asse z.

a) Calcolare il baricentro di Ω.

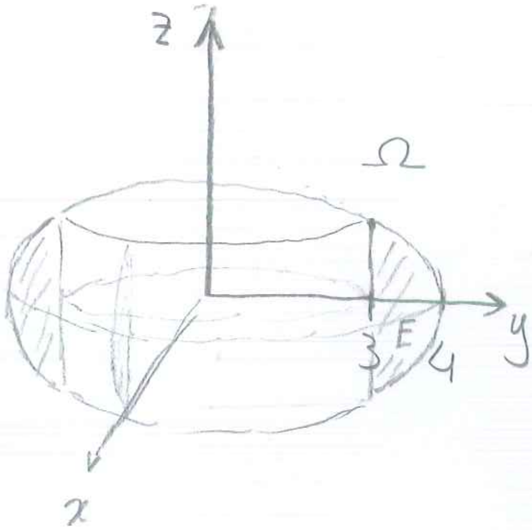
b) Calcolare $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2 + y^2)^{-1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

2+4 punti

Risposta: (a) $x_B = y_B = z_B = 0$

(b) $8\pi/3$

Svolgimento:



$$E = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{3 \leq y \leq 4 - z^2}_{\leq}\}$$

$$= \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-1,1],\ 3 \leq y \leq 4 - z^2\}$$

Ω solido di rotazione:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-1,1],\ 3 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4 - z^2\}$$

(a) Ω di rotazione rispetto all'asse z $\Rightarrow$ $x_B = y_B = 0$

Ω simmetrico rispetto a $z = 0$ $\Rightarrow$ $z_B = 0$

(b) Per strati:

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)^{-1/2} = \int_{-1}^{1} \iint_{3 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4-z^2} (x^2+y^2)^{-1/2} = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_3^{4-z^2} \frac{1}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r}\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (4 - z^2 - 3)\, dz = 2\pi \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 4\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

(4)

a) Determinare $K \in \mathbb{R}$ in modo tale che il campo vettoriale $\mathbf{V} : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{V}(x, y) = \left(e^{-y/2} + e^{-Kx} \ , \ y\left(1 + e^{Kx}\right) \right)$$

abbia divergenza costante.

b) Per tale valore di K, calcolare

$$\int_{\gamma+} \mathbf{V} \cdot (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x), \qquad \gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t).$$

1+5 punti

Risposta: (a) $K = 0$

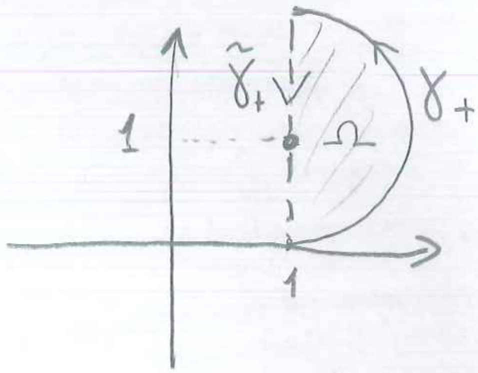
(b) $4 + \pi - 2e^{-1}$

Svolgimento:

(a) $\operatorname{div} \underline{V} = -Ke^{-Kx} + 1 + e^{Kx} = \text{cost} \ (= 2) \iff K = 0$

(b) $\underline{V} = \left(e^{-y/2} + 1 \ , \ 2y\right)$

Si può procedere in vari modi (anzitutto il calcolo esplicito, che non è difficile), il più istruttivo dei quali è il seguente.



Sia Ω come in figura. Allora

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \underline{V} = \iint_\Omega 2 = 2|\Omega| = \pi$$

$$\|$$

$$\int_{\partial\Omega} \underline{V} \cdot \underline{n}_e \, ds = \int_{\gamma_+} \underline{V} \cdot (dy, -dx) + \int_{\tilde{\gamma}_+} \underline{V} \cdot (dy, -dx) \quad \boxed{\underline{n}\, ds = (dy, -dx)}$$

Quindi

$$\int_{\gamma_+} \underline{V} \cdot (dy, -dx) = \pi - \int_{\tilde{\gamma}_+} \underline{V} \cdot (dy, -dx)$$

$$= \pi + \int_{\tilde{\gamma}_-} \underline{V} \cdot (dy, -dx)$$

$$\tilde{\gamma}_- : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}_-(t) = (1, t)$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_-} \underline{V} \cdot (dy, -dx) = \int_0^2 (e^{-t/2} + 1, 2t) \cdot (1, 0)\, dt$$

$$= \int_0^2 (e^{-t/2} + 1)\, dt = \left[t - 2e^{-t/2} \right]_0^2$$

$$= 2 - 2(e^{-1} - 1)$$

$$= 4 - 2e^{-1}$$

da cui segue la risposta.