ANALISI MATEMATICA — INGEGNERIA GESTIONALE
PROF. GIACOMELLI — ESEMPI DI ESERCIZI D'ESAME

Contents

Ultimo aggiornamento: febbraio 2011 — si prega di segnalare eventuali errori

---

1. Numeri complessi

(*) Data l'equazione

$$z^2 - i\,\overline{z} + |z|^2 = 4,$$

determinarne (se esistono) le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z|^2 \leq 3$.

. . . .

Posto $z = x + iy$, si ha

$$z^2 - i\,\overline{z} + |z|^2 = x^2 - y^2 + 2ixy - ix - y + x^2 + y^2 = 2x^2 - y + ix(2y-1),$$

perciò le soluzioni devono verificare

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 4 \\ x(2y-1) = 0. \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazione e sostituendo nella prima si ottiene

$$\begin{cases} y = -4 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2x^2 = 9/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

ovvero $z_1 = -4i$, $z_2 = 3/2 + i/2$, $z_3 = -3/2 + i/2$. Poiché $|z_1|^2 = 16$, $|z_2|^2 = 5/2$ e $|z_3|^2 = 5/2$, le soluzioni che verificano la condizione richiesta sono z_2 e z_3.

(08/09)

(*) Determinare (purché esistano) le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$|z|^2 - 2(\overline{z})^2 = 4i + 2\ .$$

. . . .

Risposta: $\pm(1+i)$.

(05/06)

(*) Determinare le soluzioni in campo complesso delle seguenti equazioni:

(a) $z^3 = 1 - i$;
(b) $z^3 = 5\overline{z}$.

. . . .

(a) Si ha $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Perciò, posto $z = re^{i\theta}$, si ha

$$\begin{aligned} z^3 = 1 - i \iff & r^3 e^{3i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}+2k\pi} \\ \iff & r = 2^{\frac{1}{6}} \quad \text{e} \quad \theta = \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

e quindi le soluzioni sono

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad z_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

(b) Posto $z = re^{i\theta}$, si ha $\overline{z} = re^{-i\theta+2k\pi}$. Perciò

$$\begin{aligned} z^3 = 5\overline{z} \iff & r^3 e^{3i\theta} = 5re^{-i\theta} \\ \iff & r = 0 \quad \text{oppure} \quad r = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad 4i\theta = 2k\pi \end{aligned}$$

e quindi le soluzioni sono

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \sqrt{5}, \quad z_2 = -\sqrt{5}, \quad z_3 = i\sqrt{5}, \quad z_4 = -i\sqrt{5}.$$

---

2. Funzioni: dominio, estremo superiore e inferiore, massimi e minimi

---

(06/07)

(*) Determinare il dominio naturale della funzione $f : \mathrm{dom} f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}-1}} - 1 \ .$$

. . . .

Le condizioni sono

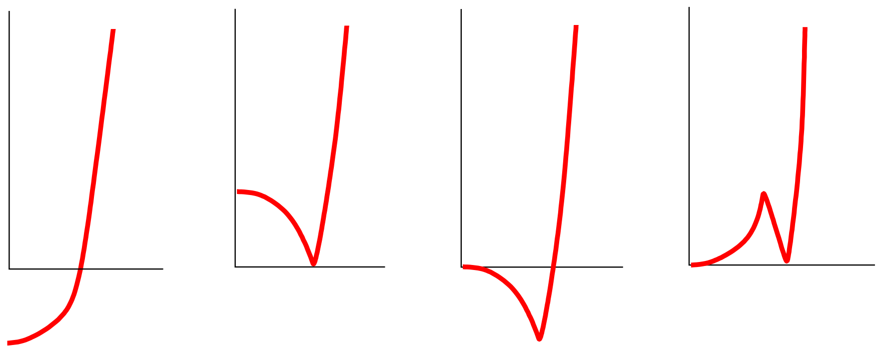
$$x - 1 \geq 0, \quad \sqrt{x-1} - 1 \neq 0, \quad \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} \neq 0,$$

da cui segue che dom $f = [1, +\infty) \setminus \left\{2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(*) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \left|\left|x^2 - 1\right| - 1\right| \ .$$

. . . .



Il grafico della funzione è elementare: in figura, per $x \geq 0$, il grafico qualitativo delle funzioni $x \mapsto x^2 - 1$, $x \mapsto |x^2 - 1|$, $x \mapsto |x^2 - 1| - 1$ e $x \mapsto ||x^2 - 1| - 1|$, nell'ordine. Dal grafico (con calcoli banali) si deduce che $x = \pm 1$ sono punti di massimo locale, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di minimo locale (e assoluto), $\sup f = +\infty$ e $\inf f = 0$.

(08/09)

(*) Data la funzione $f : [-5, -3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |9 + 2x|, \qquad x \in [-5, -3] ,$$

determinarne (purché esistano) i punti di massimo locale, i punti di massimo assoluto, i punti di minimo locale e i punti di minimo assoluto.

. . . .

Il grafico qualitativo della funzione è elementare. Da esso si deduce che $x = -9/2$ punto di minimo locale e assoluto, $x = -3$ punto di massimo locale e assoluto, $x = -5$ punto di massimo locale.

(*) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = ||x|^3 - 2| .$$

. . . .

Dal grafico qualitativo, ottenuto per composizione di funzioni elementari, si deduce immediatamente che $\sup f = +\infty$, $\inf f = 0$, $x = 0$ è punto di massimo locale e $x = \pm\sqrt[3]{2}$ sono punti di minimo locale (e assoluto).

(*) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : [-4, 3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-3) & \text{se } x > -2 \\ |x+3| & \text{se } x \leq -2 . \end{cases}$$

. . . .

Il grafico della funzione è elementare; tracciandolo nell'intervallo $[-4, 3]$ si ottiene che $x = -4$ e $x = 3$ sono punti di massimo locale, $x = -3$ e $x = 1$ sono punti di minimo locale, $\sup f = 5$ e $\inf f = -4$.

(05/06)

(*) Determinare il dominio naturale, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione f :dom$f \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) \ = \ \log(|x-2|-2) \ .$$

....

Risposta: dom$f = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. Dal grafico qualitativo, ottenibile per composizione di funzioni elementari, si deduce immediatamente che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.

Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventuali massimi e minimi locali o assoluti della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da (08/09)

$$f(x) = \left| 2 - \frac{3}{|x|+1} \right| \ .$$

....

Dal grafico qualitativo della funzione, ottenibile per composizione di funzioni elementari come negli esercizi precedenti, si deduce immediatamente che $\sup f = 2$, $\inf f = \min f = 0$ (in $x = \pm 1/2$) e 1 è un massimo locale (in $x = 0$).

---

3. Successioni e serie

(*) Data la successione

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{n^n (n!)} \ ,$$

calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ .$$

....

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad &= \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)! \ (n^n) \ (n!)}{(n+1)^{n+1}((n+1)!)((2n+1)!)} \\
&= \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
&= \quad \frac{4}{e}.
\end{aligned}$$

(*) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_0 > 0$ e $a_{n+1} \geq 3a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (05/06)

(a) Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \ = \ +\infty \ ;$$

(b) Mostrare con un contresempio che la conclusione in (a) è falsa se non si assume che $a_0 > 0$.

....

(a) segue immediatamente da

$$a_{n+1} \geq 3^n a_0,$$

che dimostriamo per induzione: l'affermazione è vera per $n = 0$; se è vera fino ad n, allora

$$a_{n+2} \geq 3a_{n+1} \geq 3 \cdot 3^n a_0 = 3^{n+1} a_0.$$

(b) Se $a_0 = 0$, la successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = 0$ per ogni n soddisfa tutte le ipotesi, ma il limite ovviamente è zero.

(*) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione ricorsiva definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n & n \geq 0 \\ a_0 = 4 \; ; \end{cases}$$

(a) utilizzando il principio di induzione, dimostrare che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(b) determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \; a_n \; .$$

....

(a) 1) $a_0 = 4 > 0$; 2) se $a_n > 0$ allora $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n > 0$.
(b) Poiché per (a) la serie è a termini positivi, si può applicare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{2} \; ,$$

quindi la serie è convergente.

(05/06)

(*) Determinare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right).$$

....

Risposta: 3/2.

(*) Dire se la seguente serie è convergente, divergente o irregolare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n(n!)^3} \; .$$

....

La serie è a termini positivi, quindi possiamo applicare il criterio del rapporto: poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(3(n+1))!}{(n+1)((n+1)!)^3}}{\frac{(3n)!}{n(n!)^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+1)^3} = 27 > 1,$$

la serie è divergente.

(05/06)

(*) Al variare di $x \in \mathbf{R}$, studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-3n} n^{2n}}{(n!)^x}.$$

....

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{-3(n+1)}(n+1)^{2(n+1)}}{[(n+1)!]^x}}{\frac{e^{-3n}n^{2n}}{(n!)^x}} = \lim_{n\to\infty} e^{-3}\,(n+1)^{2-x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$
$$= \begin{cases} 0 & x>2 \\ e^{-1} & x=2 \\ +\infty & x<2. \end{cases}$$

Pertanto la serie converge per $x \in [2,+\infty)$.

(*) Determinare (purché esistano) i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie converge: (08/09)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2x-7)^{2k} \quad .$$

. . . .

Risposta: $x \in (3,4)$.

(*) Determinare (se esistono) i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{|x|+7}}{\sqrt{3|x|+4}+1}\right)^n .$$

. . . .

Risposta: ogni $x \in \mathbb{R}$.

(*) Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n^{2n+1}} x^n .$$

. . . .

$x \in [-e^2/4, e^2/4]$.

Determinare il carattere della serie (08/09)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!-k!}{k^k} \quad .$$

. . . .

Risposta: divergente a $+\infty$.

(*) Determinare (purché esistano) i valori di $\alpha \in (0,+\infty)$ per i quali la seguente serie converge: (08/09)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^{5\alpha}}{\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\alpha}-1\right)^{3/2}} \quad .$$

. . . .

Si ha

$$\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^{5\alpha}=\left(\frac{1}{k+1}\right)^{5\alpha}=\frac{1}{k^{5\alpha}}(1+o(1)) \quad \text{per} \quad k\to+\infty$$

e

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\alpha}-1=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha}-1=\frac{\alpha}{k}(1+o(1)) \quad \text{per} \quad k\to+\infty\ .$$

Pertanto

$$\frac{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^{5\alpha}}{\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\alpha}-1\right)^{3/2}}=\frac{1}{\alpha k^{5\alpha-3/2}}(1+o(1)) \quad \text{per} \quad k\to+\infty\ .$$

Per il criterio del confronto, la serie converge se e solo se $5\alpha-3/2>1$, ovvero se e solo se $\alpha>1/2$.

(*) Determinare (se esistono) i valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}+n^{8-\alpha}}{3n^6-2\sin(n)}.$$

....

La serie è a termini positivi. Per $n\to+\infty$, si ha

$$n^{\alpha}+n^{8-\alpha}=\begin{cases} n^{\alpha}(1+o(1)) & \text{se } \alpha>4\\ 2n^4 & \text{se } \alpha=4\\ n^{8-\alpha}(1+o(1)) & \text{se } \alpha<4\end{cases} \quad \text{e} \quad 3n^6-2\sin(n)=3n^6(1+o(1)).$$

Quindi

$$\frac{n^{\alpha}+n^{8-\alpha}}{3n^6-2\sin(n)}=\begin{cases} \frac{1}{3}n^{\alpha-6}(1+o(1)) & \text{se } \alpha>4\\ \frac{2}{3}n^{-2} & \text{se } \alpha=4\\ \frac{1}{3}n^{2-\alpha}(1+o(1)) & \text{se } \alpha<4\end{cases} \quad \text{per} \quad n\to+\infty.$$

Dal criterio del confronto (con le serie armoniche generalizzate) segue che la serie in esame è convergente se e solo se $3<\alpha<5$.

(*) Determinare (se esistono) i valori di $x\in\mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x+\left(\frac{|x|}{2}\right)^{8n}}.$$

....

Si ha, per le gerarchie di infiniti,

$$\frac{1}{n^x+\left(\frac{|x|}{2}\right)^{8n}}=\begin{cases} \left(\frac{2}{|x|}\right)^{8n}(1+o(1)) & \text{se } x>2 \text{ oppure } x\le -2\\ n^{-x}(1+o(1)) & \text{se } -2<x\le 2\end{cases} \quad \text{per} \quad n\to+\infty.$$

Per confronto (con la serie geometrica o con la serie armonica generalizzata), la serie converge se e solo se $x>1$ o $x<-2$.

(*) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il comportamento (convergente, divergente o irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\alpha+8}}{n^7 + e^{(\alpha-1)n}} \ .$$

. . . .

Si tratta di una serie a termini positivi. Se $\alpha > 1$, si ha

$$\frac{n^{2\alpha+8}}{n^7 + e^{(\alpha-1)n}} \sim \frac{n^{2\alpha+8}}{e^{(\alpha-1)n}} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\alpha+8}}{e^{(\alpha-1)n}}$ è convergente per ogni $\alpha > 1$ (ad esempio per il criterio della radice), anche la serie in esame è convergente per $\alpha > 1$.
Se $\alpha \leq 1$, si ha

$$\frac{n^{2\alpha+8}}{n^7 + e^{(\alpha-1)n}} \sim \frac{n^{2\alpha+8}}{n^7} = \frac{1}{n^{-1-2\alpha}} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1-2\alpha}}$ è convergente se e solo se $-1-2\alpha > 1$, ovvero $\alpha < -1$, concludiamo che:

$$\text{la serie in esame è } \begin{cases} \text{convergente per } \alpha \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ \text{divergente a } +\infty \text{ per } \alpha \in [-1,1]. \end{cases}$$

(*) (a) Al variare del parametro $\alpha \in (0,\infty)$, determinare (nei casi in cui esiste) il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2n^\alpha}} \right)^{n^2} ;$$

(b) al variare del parametro $\alpha \in (0,\infty)$, determinare il comportamento (convergente, divergente o irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2n^\alpha}} \right)^{n^2} .$$

. . . .

(a) Si ha, per $\alpha \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2n^\alpha}} \right)^{n^2} &= \left(1 - \frac{1}{2n^\alpha} \right)^{-n^2} \\ &= e^{-n^2 \log\left(1-\frac{1}{2n^\alpha}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2} n^{2-\alpha}(1+o(1))} \quad \text{per } n \to \infty. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2n^\alpha}} \right)^{n^2} = \begin{cases} +\infty & \alpha \in (0,2) \\ e^{1/2} & \alpha = 2 \\ 1 & \alpha \in (2,\infty). \end{cases}$$

(b) La serie diverge per ogni $\alpha \in (0,\infty)$ poiché, per (a), la condizione necessaria non è soddisfatta.

(05/06)

(*) Al variare di $\alpha \in (-\infty,\infty)$, studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} + |2-\alpha|^n}.$$

. . . .

Si tratta di una serie a termini positivi, quindi o converge o diverge a $+\infty$. La condizione necessaria è sempre verificata:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha}{2}} + |2-\alpha|^n = +\infty \iff \alpha > 0 \text{ oppure } |2-\alpha| > 1 \iff \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $|2-\alpha| > 1$, ovvero $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, si ha

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} + |2-\alpha|^n} = \frac{1}{|2-\alpha|^n(1+o(1))},$$

e la serie converge per il criterio del confronto asintotico. Se invece $\alpha \in [1, 3]$, si ha

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} + |2-\alpha|^n} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}(1+o(1))}$$

e ancora per confronto asintotico la serie converge se $\alpha \in (2, 3]$. Pertanto la serie converge per $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ e diverge a $+\infty$ altrimenti.

(*) Determinare (se esistono) i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^{3-\alpha})}{n^{4-\alpha}}.$$

. . . .

Risposta: $\alpha < 3$.

(*) (a) Determinare, se esiste, il limite (05/06)

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right);$$

(b) studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n^2)}{1+\log n}\right).$$

. . . .

Risposta: (a) 1; (b) assolutamente convergente.

(*) Determinare il seguente limite: (08/09)

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\sin(8x))^{-\frac{5}{x}} .$$

. . . .

Risposta: e^{-40}.

(*) Determinare il seguente limite: (08/09)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{e^{7x}-1}} - \frac{1}{\sqrt{e^{x}-1}} \right).$$

. . . .

Risposta: $-\infty$.

(*) Calcolare (purché esista) il seguente limite: (08/09)

$$\lim_{x\to 4^+} \left[\log(4e^{x-4}-x) - \log(4x-16)\right]$$

. . . .

Ponendo $y = x-4$ e ricordando che $e^y = 1+y+o(y)$ per $y \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4^+} \left[\log(4e^{x-4}-x) - \log(4x-16)\right] &= \lim_{y\to 0^+} [\log(4e^y - y - 4) - \log(4y)] \\
&= \lim_{y\to 0^+} \log\left(\frac{3y+o(y)}{4y}\right) \\
&= \log\left(\frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

(*) Determinare (se esiste)

$$\lim_{x\to 0} \left(\log\left(\frac{1}{3^{1/x}}\right) - \frac{1}{x}\log\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)(1-2x)\right)\right).$$

. . . .

Si ha

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{3^{1/x}}\right) - \frac{1}{x}\log\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)(1-2x)\right) &= -\frac{1}{x}\log\left(3\left(x+\frac{1}{3}\right)(1-2x)\right) \\
&= -\frac{1}{x}\log(1+x-6x^2) \\
&= -\frac{1}{x}(x-6x^2+o(x-6x^2)) \\
&= -\frac{1}{x}(x+o(x)) \quad \text{per} \quad x\to 0.
\end{aligned}$$

Perciò il limite vale -1.

(*) Determinare (se esiste)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x^4+3x^2 - x(x^2-1)\sqrt{x^2+9}\right)$$

. . . .

Si ha

$$\begin{aligned} x^4+3x^2-x(x^2-1)\sqrt{x^2+9} &= x^4+3x^2-x^2(x^2-1)\sqrt{1+9/x^2} \\ &= x^4+3x^2-(x^4-x^2)\left(1+\frac{9}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \quad \text{per} \quad x\to+\infty, \end{aligned}$$

perciò il limite vale $-\infty$.

(08/09)

Per ogni $\alpha\in(0,+\infty)$ determinare (purché esista)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(n^{-\alpha}\right)\right)^n \ .$$

. . . .

Risposta: 0 se $\alpha\in(0,1/2)$, $e^{-1/2}$ se $\alpha=1/2$, 1 se $\alpha\in(1/2,+\infty)$.

(*) In ciascuna delle seguenti situazioni, dire se è possibile determinare il limite e in tal caso calcolarlo:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-g(x)}{x^4}$, dove $f(x)=o(x^2)$ e $g(x)=o(x^4)$ per $x\to0^+$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x^4}$, dove $f(x)=o(x^2)$ e $g(x)=o(x^4)$ per $x\to+\infty$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^{f(x)}-1-\sin(g(x))}{x}$, dove $f(x)=o(x)$ e $g(x)=o(x)$ per $x\to0^+$.

. . . .

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{o(x^2)-o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(x^2)}{x^4}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}$ forma indeterminata ;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{o(x^2)-o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{o(x^4)}{x^4}=0$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^{f(x)}-1-\sin(g(x))}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(f(x)-g(x))(1+o(1))}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(x)}{x}=0.$

(*) Determinare (se esiste) l'ordine di infinitesimo per $x\to0^+$ della funzione

$$f(x)=\log\left(\frac{(1+x)^{\sin x}}{(2+x)^x}\right) \ .$$

. . . .

Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x\log(1+x)-x\log(2+x) \\ &= (x+o(x))(x+o(x))-x(\log2+o(1)) \\ &= -x\log2+o(x) \quad \text{per } x\to0^+. \end{aligned}$$

Perciò l'ordine di infinitesimo esiste e vale 1.

(*) Sia

$$f(x) = 1 - \left(1 - x^4\right)^{1/x}.$$

(a) Determinare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x);$$

(b) determinare, se esiste, l'ordine di infinito o di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

. . . .

Si ha

$$(1-x^4)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log(1-x^4)} = e^{-x^3(1+o(1))} \quad \text{per} \quad x \to 0^+.$$

Perciò $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e

$$f(x) = 1 - e^{-x^3(1+o(1))} = x^3(1+o(1)) \quad \text{per} \quad x \to 0^+,$$

quindi l'ordine di infinitesimo è 3.

(*) Determinare il dominio naturale e gli eventuali asintoti della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log(2x-3)}{\log(|x-3|)-1}}.$$

. . . .

$\mathrm{dom} f = (3/2, 2] \cup (3+e, +\infty)$. Asintoti verticali: $x = 3/2$, $x = 3+e$. Asintoto orizzontale: $y = 1$ per $x \to +\infty$.

---

5. Funzioni (dis)continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

(*) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 2e^x + \operatorname{arctg}(2x^3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrare che f è invertibile in $\mathbb{R}$;
(b) determinare il dominio della funzione inversa f^{-1};
(c) determinare (se esiste) $(f^{-1})'(2)$ (si osservi che $f(0) = 2$).

. . . .

Per (a), basta osservare che

$$f'(x) = 2e^x + \frac{6x^2}{4x^6+1} > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R};$$

quindi f è strettamente crescente e perciò invertibile.
Per (b), ricordando che $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f$, basta determinare $\mathrm{im} f$. Poiché f è continua e monotona, e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

si conclude che $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f = (-\frac{\pi}{2}, +\infty)$.
Per (c), basta applicare il teorema di derivazione della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

(*) Determinare il valore del parametro $a \in (0, +\infty)$ per il quale la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{se } x < 1 \\ x + 15 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua in $x = 1$; per tale valore di a, determinare $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ e $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$.

. . . .

Risposta: $a = 5$; $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$, $\inf_{\mathbb{R}} f = 16$.

---

6. Calcolo differenziale per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

(*) Determinare il dominio naturale, gli eventuali asintoti e gli eventuali punti critici della funzione

$$f(x) = \log\left(e^{|x|} - 2\right) - 3|x|.$$

. . . .

$\mathrm{dom} f = (-\infty, -\log 2) \cup (\log 2, +\infty)$; $x = -\log 2$ e $x = \log 2$ asintoti verticali, $y = -2x$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$, $y = 2x$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$; i punti critici sono $x = -\log 3$ e $x = \log 3$.

(*) Determinare il valore della funzione $f(x) = e^{3\cos(2x)}$ nei suoi punti di flesso.

. . . .

Poiché $f \in C^2(\mathbb{R})$, i punti di flesso sono tutti e soli le soluzioni di $f''(x) = 0$. Si ha

$$f'(x) = e^{3\cos(2x)}(-6\sin(2x)), \quad f''(x) = e^{3\cos(2x)}(36\sin^2(2x) - 12\cos(2x)) = 0.$$

Perciò

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\iff \quad 3\sin^2(2x) = \cos(2x) \\ &\iff \quad 3 - 3\cos^2(2x) = \cos(2x) \\ &\iff \quad \cos(2x) = \frac{\sqrt{37} - 1}{6} \end{aligned}$$

(l'altra soluzione è inammissibile). Quindi il valore della funzione nei punti di flesso è $e^{\frac{\sqrt{37}-1}{2}}$.

(*) Quanti sono i valori distinti di $x \in [-1, +\infty)$ in cui la funzione

$$f(x) = (x+1)(x+2)\log(x+2) - 4(x+1)$$

si annulla?

. . . .

Sia $x \in I = [-1, +\infty)$. Si ha

$$f(x) = (x+1)g(x), \quad g(x) := (x+2)\log(x+2) - 4.$$

Quindi $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$ oppure $g(x) = 0$. Si ha

$$g'(x) = \log(x+2) + 1 \lesseqqgtr 0 \iff x \lesseqqgtr -2 + 1/e.$$

In particolare g è strettamente crescente in I e $g(-1) = -4$. Perciò esiste un unico $x \in (-1, +\infty)$ tale che $g(x) = 0$, e gli zeri di f in I sono complessivamente 2.

(*) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da (08/09)

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{4x^2 + 1}.$$

. . . .

È possibile procedere in (almeno) due modi.

1) La funzione f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, e si ha

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(1 - 2x)^2}{(1 + 4x^2)^2} \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto f è crescente in $\mathbb{R}$. Quindi

$$\sup f = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \inf f = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

2) In alternativa allo studio della monotonia di f, si può osservare che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; quindi $\mathrm{Im}(f) \subseteq (0, +\infty)$, ovvero $\inf f \in [0, \infty)$ e $\sup f \in (0, \infty]$. Poiché $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e $f(x) \to 0$ per $x \to -\infty$, si conclude che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = 0$.

(*) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da (08/09)

$$f(x) = \begin{cases} -2 - 3e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ -3 - 2e^{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

. . . .

Risposta: $\inf f = -5$, $\sup f = -2$.

(*) Determinare (se esistono) i punti di massimo locale e i punti di minimo locale della seguente funzione:

$$f(x) = \left| \frac{x - 3}{x^2 + 1} \right|.$$

. . . .

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x^2+1} & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{3-x}{x^2+1} & \text{se } x < 3 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2} & \text{se } x > 3 \\ \frac{x^2-6x-1}{(x^2+1)^2} & \text{se } x < 3. \end{cases}$$

Dallo studio del segno della derivata si evince che f è crescente in $(-\infty, 3 - \sqrt{10})$ e in $(3, 3 + \sqrt{10})$ e decrescente altrimenti. Perciò $3 \pm \sqrt{10}$ sono punti di massimo locale e $x = 3$ è punto di minimo locale.

(*) Data la funzione

$$f(x) = \left|x^3 - 4\right| - \left|x + \frac{1}{2}\right|,$$

determinarne i punti di massimo e minimo relativo e assoluto nell'intervallo $[-1, 2]$.

. . . .

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4 - x - \frac{1}{2} & x \in [\sqrt[3]{4}, \infty) \\ 4 - x^3 - x - \frac{1}{2} & x \in [-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{4}) \\ 4 - x^3 + x + \frac{1}{2} & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}). \end{cases}$$

Poiché

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \in (\sqrt[3]{4}, \infty) \\ -3x^2 - 1 & x \in (-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{4}) \\ -3x^2 + 1 & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}), \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &f \text{ crescente in } (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{2}) \cup (\sqrt[3]{4}, 2) \\ &f \text{ decrescente in } (-1, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \cup (-\tfrac{1}{2}, \sqrt[3]{4}). \end{aligned}$$

Quindi $x = -1$, $x = -1/2$ e $x = 2$ sono punti di massimo locale, e $x = -1/\sqrt{3}$ e $x = -\sqrt[3]{4}$ sono punti di minimo locale. Per determinare gli estremi assoluti confrontiamo i valori: poiché

$$f(-1) = \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2} > f(-\frac{1}{2}) = 4 + \frac{1}{8} > f(2) = 4 - \frac{5}{2},$$

$x = -1$ è punto di massimo assoluto; analogamente, si ottiene che $x = \sqrt[3]{4}$ è punto di minimo assoluto.

(*) Determinare i punti di massimo locale e i punti di minimo locale della funzione $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ definita da (08/09)

$$f(x) = 10\sin(x) - \tfrac{1}{2}\cos(2x), \quad x \in \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right].$$

. . . .

Si ha

$$f'(x) = 10\cos(x) + \sin(2x) = 2\cos(x)(\sin(x) + 5),$$

quindi

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr \frac{\pi}{2} \quad \text{per } x \in \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right].$$

Perciò $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$ sono punti di minimo locale, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo locale.

(*) Determinare, purché esistano, i punti di massimo locale e i punti di minimo locale della funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da (08/09)

$$f(x) = (3x + x^2)(1 - \log(8x)) - \frac{1}{2}x^2, \quad x \in (0, +\infty).$$

. . . .

Risposta: $x = 8$ punto di massimo locale.

(*) Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = 2^{\arctan(x) - \frac{x}{2}};$$

determinarne il dominio naturale, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale.

. . . .

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$. Si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty,$$
quindi $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Si ha
$$f'(x) = 2^{\arctan(x)-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)\log 2,$$
quindi
$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-1,1), \qquad f'(x) = 0 \text{ se } \quad x = \pm 1, \qquad f'(x) < 0 \text{ altrimenti;}$$
perciò f ha un punto di massimo locale in $x = 1$ e un punto di minimo locale in $x = -1$.

(*) Determinare $A \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^4 & \text{se } -2 \le x \le -\frac{1}{2} \\ A \ \mathrm{arctg}(x+3) - 1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$
risulti continua nel suo dominio; per tale valore di A, determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto di f nel suo dominio.

....

$\mathrm{dom} f = (-\infty, -\frac{1}{2}]$, ed $f \in C((-\infty, -\frac{1}{2}] \setminus \{-2\})$ per le proprietà elementari delle funzioni continue. Si ha $f \in C((-\infty, -\frac{1}{2}])$ se e solo se
$$f(-2) = 1 = \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = A\frac{\pi}{4} - 1 \iff A = \frac{8}{\pi}.$$
In tal caso, si ha
$$f'(x) = \begin{cases} 4(x+1)^3 & -2 < x \le -\frac{1}{2} \\ \frac{8}{\pi}\frac{1}{(x+3)^2+1} & x < -2, \end{cases}$$
quindi:

f crescente in $(-\infty, -2)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$,
f decrescente in $(-2, -1)$.

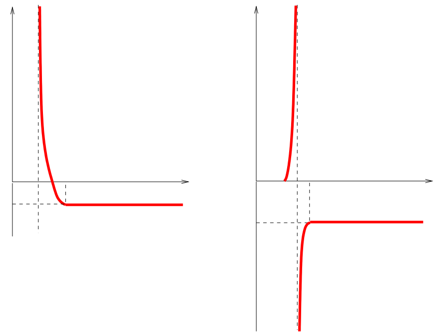
Pertanto $x = -2$ è un punto di massimo locale, $x = -1$ è un punto di minimo locale, e $x = 0$ è un punto di massimo locale. Poiché $f(-2) = 1 > f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$, $x = -2$ è in effetti un punto di massimo globale e $\sup f = 1$. Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -5 < f(-1) = 0$, $\inf f = -5$.

(*) (a) Studiare la funzione (05/06)
$$f(x) \ = \ \log\left(\frac{1}{|x| - |x-2|}\right)$$
e tracciarne un grafico qualitativo nell'ipotesi che il numero di flessi sia minimo.

(b) Utilizzando (a), tracciare senza ulteriori calcoli un grafico qualitativo della funzione
$$g(x) \ = \ \frac{1}{\log\left(\frac{1}{|x|-|x-2|}\right)}.$$

....

$\mathrm{dom} f = (1, +\infty)$, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 3/2$, $f(x) \to +\infty$ per $x \to 1^+$, f strettamente decrescente in $(1, 2]$, $f(x) = -\log 2$ per ogni $x \in [2, +\infty)$.



(*) (a) Studiare la funzione (05/06)

$$f(x) \;=\; 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$$

e tracciarne un grafico qualitativo nell'ipotesi che il numero di flessi sia minimo.

(b) Utilizzando (a), tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$g(x) \;=\; |f(x)|;$$

dire se la funzione $g(x)$ è derivabile nei punti $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$.

---

7. Applicazioni dei teoremi di de l'Hopital e di Peano

(*) Determinare (se esiste) il seguente limite: (05/06)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(\cos(x^2)-1)} - 1}{(x - \sin(x))^2}$$

. . . .

Si ha

$$\cos(x^2) - 1 = -\frac{1}{2}x^4(1 + o(1)),$$

da cui

$$e^{(\cos(x^2)-1)} - 1 = e^{-\frac{1}{2}x^4(1+o(1))} - 1 = -\frac{1}{2}x^4(1 + o(1)).$$

Inoltre

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3(1 + o(1))$$

da cui

$$(x - \sin(x))^2 = \frac{1}{36}x^6(1 + o(1)).$$

Pertanto il limite vale $-\infty$.

(*) Determinare (se esiste) il seguente limite: (05/06)

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\log(1 - x) + \frac{1}{2}(\log(1 + x))^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \right) \right].$$

. . . .

Si ha

$$\begin{aligned} \log(1-x) &= -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \\ (\log(1+x))^2 &= (x+o(x))^2 \;=\; x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\log(1-x) + \frac{1}{2}(\log(1+x))^2 + x - \frac{1}{2}x^2\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

(*) Determinare (se esiste) il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2\log(x) + \sin(2-2x)\cdot\cos(\sqrt{3x-3})}{(x-1)^2}\ .$$

. . . .

Ponendo $y = x-1 \to 0^+$ per $x \to 1^+$, si ottiene

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+}\frac{2\log(x) + \sin(2-2x)\cdot\cos(\sqrt{3x-3})}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{y\to 0^+}\frac{2\log(1+y) + \sin(-2y)\cdot\cos(\sqrt{3y})}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0^+}\frac{2(y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) - 2(y + o(y^2))(1 - \frac{3}{2}y + o(y))}{y^2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

(*) Determinare, purché esista, l'ordine di infinito o di infinitesimo per $x \to +\infty$ della funzione $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da (08/09)

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}\,\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\ .$$

. . . .

Poiché $\log(1+y) = y - y^2/2 + o(y^2)$ per $y \to 0$ e $1/\sqrt[3]{x} \to 0$ per $x \to +\infty$, mediante la sostituzione $y = 1/\sqrt[3]{x}$ si ottiene

$$f(x) = 1 - x^{1/3}\left(x^{-1/3} - \frac{x^{-2/3}}{2} + o(x^{-2/3})\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/3}(1+o(1)) \quad \text{per} \quad x \to +\infty.$$

Perciò la funzione è infinitesima per $x \to +\infty$ e il suo ordine di infinitesimo è $1/3$.

(*) Determinare (purché esistano) i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali il seguente limite è uguale a zero: (08/09)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x^{8\alpha} - \sin(x)}.$$

. . . .

Si ha

$$x^{8\alpha} - \sin x = \left\{\begin{array}{ll} x^{8\alpha}(1+o(1)) & \text{se } 8\alpha < 1 \\ x - \sin(x) = \frac{x^3}{6}(1+o(1)) & \text{se } 8\alpha = 1 \\ -x(1+o(1)) & \text{se } 8\alpha > 1. \end{array}\right\} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Perciò

$$\frac{x^3}{x^{8\alpha}-\sin(x)} = \left\{\begin{array}{ll} x^{3-8\alpha}(1+o(1)) & \text{se } 8\alpha<1 \\ \frac{1}{6}(1+o(1)) & \text{se } 8\alpha=1 \\ -x^2(1+o(1)) & \text{se } 8\alpha>1. \end{array}\right\} \quad \text{per } x\to 0^+.$$

Poiché $3-8\alpha>0$ se $8\alpha<1$, si conclude che il limite è zero per ogni $\alpha\neq 1/8$.

(*) Determinare (se esiste)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{54x^3}-\frac{1-\cos(3x)}{81x^4}\right) .$$

....

Risposta: $-1/24$.

(*) Determinare (se esiste) il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2+x^3}-\left(\frac{2}{\log(1-2x)}\right)^2\right).$$

....

Risposta: $+\infty$.

(08/09)

(*) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 1 di centro $x_0=1$ della seguente funzione:

$$f(x)=(x+3)\cos\left(\frac{\pi x^5}{3}\right) .$$

....

Si ha $f(1)=2$ e

$$f'(x)=\cos\left(\frac{\pi x^5}{3}\right)-(x+3)\frac{5\pi x^4}{3}\sin\left(\frac{\pi x^5}{3}\right)$$

da cui

$$f'(1)=\frac{1}{2}-\frac{10\pi}{\sqrt{3}} .$$

Pertanto

$$T_1[f,x_0](x)=2+\left(\frac{1}{2}-\frac{10\pi}{\sqrt{3}}\right)(x-1) .$$

(*) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x=\pi/4$ della seguente funzione:

$$f(x)=e^{\tan x-1} .$$

....

Si ha

$$f'(x)=e^{\tan x-1}\frac{1}{\cos^2 x},\quad f''(x)=e^{\tan x-1}\left(\frac{1}{\cos^4 x}+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right).$$

Perciò $f(\pi/4)=1$, $f'(\pi/4)=2$, $f''(\pi/4)=8$, e quindi

$$T_2(x)=1+2(x-\pi/4)+4(x-\pi/4)^2.$$

(08/09)

Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 con centro in $x = 0$ della funzione
$$f(x) = \log(1 + x - x^2)\ .$$

....

Risposta: $T_2(x) = x - 3x^2/2$.

(*) Sia
$$f(x) = e^{\sin x} - 1\ ;$$

(*a*) utilizzando il teorema di de l'Hôpital, calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - x}{x^2}\ ;$$

(*b*) determinare il polinomio di Taylor di f di ordine 3 centrato in $x = 0$.

....

(*a*) Si ottiene:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x}\cos x - 1}{2x} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(*b*) Dal calcolo precedente segue che $T_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ e che $f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$. Poiché
$$f'''(x) = e^{\sin x}(\cos^3 x - 3\sin x\cos x - \cos x),$$
si conclude che $f'''(0) = 0$ e quindi $T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = x + \frac{1}{2}x^2$.

(*) Determinare, purché esistano, i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie (08/09)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}\left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)$$
è convergente.

....

Si ha
$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= e - e^{k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} = e - e^{\left(1 - \frac{1}{2k}(1+o(1))\right)} = e\left(1 - e^{-\frac{1}{2k}(1+o(1))}\right) \\ &= e\left(\frac{1}{2k}(1 + o(1)) + o\left(\frac{1}{k}(1 + o(1))\right)\right) = \frac{e}{2k}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad k \to +\infty. \end{aligned}$$

Perciò
$$\frac{1}{k^{\alpha+1}}\left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) = \frac{e}{2k^{\alpha+2}}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad k \to +\infty,$$
e quindi la serie è convergente se e solo se $\alpha > -1$.

(*) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^\alpha) - n^\alpha}{n^{5\alpha} + 1}.$$

....

$\alpha > 1/4$ e $\alpha < -1/3$.

(05/06)

(*) Calcolare
$$2\int \cos(\log(x^2))\,dx.$$

....

Per sostituzione, ponendo $x = e^{y/2}$ (quindi $y = \log(x^2)$), si ottiene
$$2\int \cos(\log(x^2))\,dx = \int e^{y/2}\cos y\,dy$$
che si integra per parti:
$$\begin{aligned}\int e^{y/2}\cos y\,dy &= e^{y/2}\sin y\,dy - \frac{1}{2}\int e^{y/2}\sin y\,dy\\ &= e^{y/2}\sin y + \frac{1}{2}e^{y/2}\cos y - \frac{1}{4}\int e^{y/2}\cos y\,dy.\end{aligned}$$
Pertanto
$$\int e^{y/2}\cos y\,dy = \frac{2}{5}e^{y/2}(2\sin y + \cos y) + C,$$
ovvero
$$\int \cos(\log(x^2))\,dx = \frac{2}{5}x(2\sin(\log(x^2)) + \cos(\log(x^2))) + C.$$

(*) Calcolare
$$\int \left(x^5\sin(4x^3) - e^{2x}\right)dx.$$

....

Ponendo $y = 2x$,
$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$
Ponendo $y = x^3$,
$$\begin{aligned}\int x^5\sin(4x^3)dx &= \frac{1}{3}\int y\sin(4y)dy = -\frac{1}{12}y\cos(4y) + \frac{1}{12}\int\cos(4y)dy\\ &= \frac{1}{48}(\sin(4y) - 4y\cos(4y)) + C\\ &= \frac{1}{48}(\sin(4x^3) - 4x^3\cos(4x^3)) + C.\end{aligned}$$
Perciò
$$\int \left(x^5\sin(4x^3) - e^{2x}\right)dx = \frac{1}{48}(\sin(4x^3) - 4x^3\cos(4x^3)) - \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

(08/09)

(*) Determinare le primitive della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{e^{3x}}{16 + e^{6x}}.$$

....

Risposta: $F(x) = \frac{1}{12}\arctan\left(\frac{e^{3x}}{4}\right) + C$.

(08/09)

(*) Determinare le primitive della seguente funzione:

$$\int t\,(7+4t^2)^{3/2}\,dt.$$

. . . .

Risposta: $\frac{1}{20}(7+4t^2)^{5/2}+C$.

(*) Calcolare

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \max\left\{-\frac{1}{2},\ \sin(2x)\right\}\,dx.$$

. . . .

Si ha, ponendo $t=2x$,

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \max\left\{-\frac{1}{2},\ \sin(2x)\right\}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi/2} \max\left\{-\frac{1}{2},\ \sin(t)\right\}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{7\pi/6}\sin(t)dt-\frac{1}{4}\int_{7\pi/6}^{3\pi/2}dt\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\pi.\end{aligned}$$

(*) Calcolare

$$\int_{-4}^{4}\log\left(1+\sqrt{|x|}\right)\,dx.$$

. . . .

La funzione integranda è pari. Perciò, ponendo $t=\sqrt{x}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}\log\left(1+\sqrt{|x|}\right)\,dx &= 2\int_0^4\log\left(1+\sqrt{x}\right)\,dx\\ &= 4\int_0^2 t\log(1+t)\,dt\\ &= 2t^2\log(1+t)\big|_0^2-2\int_0^2\frac{t^2}{1+t}\,dt\\ &= 8\log 3-2\int_0^2\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\,dt\\ &= 6\log 3.\end{aligned}$$

(*) Calcolare

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\,dx.$$

. . . .

Ponendo $t=$tan$(x/2)$, si ottiene

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\,dx=\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{1}{t}\,dt=\log t\big|_{1/\sqrt{3}}^{1}=\frac{1}{2}\log 3.$$

(*) Sia
$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

(a) Calcolare $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(s)\, ds$;

(b) la funzione F è una primitiva della funzione f?

. . . .

(a) Si ha
$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} -1\ ds & = 1-x & \text{se } \ x \leq 0 \\ \int_{-1}^{0} -1\ ds + \int_0^x (4s+1) ds & = 2x^2+x-1 & \text{se } \ x > 0. \end{cases}$$

(b) no, poiché $F(x)$ non è derivabile in $x = 0$.

(*) Determinare (se esistono) i punti di massimo locale e i punti di minimo locale della seguente funzione nell'intervallo I:
$$f(x) = \int_0^{x^4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\ \sqrt[4]{t}\right)\ dt, \quad x \in I = [-3, 3]\ .$$

. . . .

La funzione è pari. Si ha
$$f'(x) = 4x^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}|x|\right).$$
Per $x \in [0, 3]$ si ha $x^3 \geq 0$ e
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) > 0 \iff x \in (0, 2).$$
Perciò, ricordando che f è pari, si ottiene che f è crescente in $[-3, -2]$ e in $[0, 2]$ e decrescente in $[-2, 0]$ e in $[2, 3]$. Perciò $x = \pm 3$ e $x = 0$ sono punti di minimo locale, e $x = \pm 2$ sono punti di massimo locale.

(*) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \int_0^x \sin(t^2 - t)\ dt\ .$$
Determinare (se esiste)
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}\ .$$

. . . .

Sono verificate le ipotesi del Teorema di de l'Hôpital: perciò
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - x)}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

(08/09)

(*) (a) Determinare (purché esista) l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = -x - \frac{1}{6}x^6 + \int_0^x e^{t^5}\ dt\ ;$$

(b) calcolare (purché esista)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^{10}} - \sqrt{\dfrac{1}{x^{20}} - x}}\,.$$

. . . .

(a) Applicando, nell'ordine, il Teorema di de l'Hopital e il Teorema di Peano, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} &\overset{?}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1 - x^5 + e^{x^5}}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^{10} + o(x^{10})}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{22} \quad \text{se} \quad \alpha = 11.\end{aligned}$$

Perciò l'ordine di infinitesimo esiste ed è 11.

(b) Si può ad esempio procedere osservando che

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{10}} - \sqrt{\frac{1}{x^{20}} - x} &= \frac{1}{x^{10}}\left(1 - \sqrt{1 - x^{21}}\right) \\ &= \frac{1}{x^{10}}\left(\frac{x^{21}}{2} + o(x^{21})\right) \quad \text{per} \quad x \to 0^+.\end{aligned}$$

Perciò, utilizzando anche il punto (a), si conclude che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^{10}} - \sqrt{\dfrac{1}{x^{20}} - x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^{11}}{22}(1 + o(1))}{\frac{x^{11}}{2}(1 + o(1))} = \frac{1}{11}.$$

(08/09)

(*) Calcolare, purché esista, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_7^x e^{t^2}\, dt\,.$$

. . . .

Il limite non è una forma indeterminata in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \int_7^x e^{t^2}\, dt = \int_7^0 e^{t^2}\, dt = C$$

e $C < 0$ poiché la funzione integranda è sempre positiva in $(0, 7)$. Perciò il limite esiste e vale $-\infty$.

Si noti che, proprio perché la forma non è indeterminata, il Teorema di de l'Hopital non è applicabile (la sua applicazione condurrebbe alla conclusione errata che il limite valga -1).

(08/09)

(*) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos^2 x\, dx.$$

. . . .

Per parti, utilizzando l'identità $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos^2 x\ dx &= -e^{-x}\cos^2 x - 2\int e^{-x}\cos x \sin x\ dx \\
&= -e^{-x}(\cos^2 x - 2\sin x\cos x) - 2\int e^{-x}(\cos^2 x - \sin^2 x)\ dx \\
&= -e^{-x}(\cos^2 x - 2\sin x\cos x) - 4\int e^{-x}\cos^2 x\ dx - 2e^{-x}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int e^{-x}\cos^2 x\ dx = -\frac{1}{5}e^{-x}(2+\cos^2 x - 2\sin x\cos x) + C,$$

ovvero

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos^2 x\ dx = \frac{3}{5} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5}e^{-x}(2+\cos^2 x - 2\sin x\cos x) = \frac{3}{5}.$$

(*) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{2}\right)\right)\ :$$

(a) determinare il dominio naturale di f;
(b) determinare l'equazione della retta tangente ad f nel punto $(2, f(2))$;
(c) determinare i valori del parametro $\alpha \in (0,\infty)$ per i quali la funzione $(f(x))^{-3\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $(3/2, 2)$.

. . . .

(a) Si ha

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{2}\right) > 0 \iff \frac{x^2-x-6}{2(x-1)} > 0 \iff x \in (-\infty,-2)\cup(1,3),$$

perciò $\mathrm{dom} f = (-\infty,-2)\cup(1,3)$.
(b) Si ha $f(2) = 0$ e

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{x-1} - \frac{x}{2}},$$

da cui $f'(2) = -7/4$; perciò la retta tangente ha equazione $y = -7/4(x-2)$.
(c) La funzione è continua in $[3/2, 2)$, quindi dobbiamo considerare solo il comportamento di f per $x \to 2^-$: per (b),

$$f(x) = -\frac{7}{4}(x-2)(1+o(1)) \quad \text{per } x \to 2^-.$$

Perciò

$$\frac{1}{(f(x))^{3\alpha}} \sim \left(\frac{4}{7}\right)^{3\alpha}\frac{1}{(2-x)^{3\alpha}} \quad \text{per } \ x \to 2^-,$$

e dal criterio del confronto segue che $(f(x))^{-3\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $[3/2, 2)$ se e solo se $\alpha < 1/3$.

(*) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali il seguente integrale improprio è convergente: (05/06)

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}\,(1+x^\alpha)}\,dx.$$

. . . .

La funzione è continua in $[1, +\infty)$, quindi dobbiamo solo considerarne il comportamento per $x \to +\infty$, dove

$$\frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}\,(1+x^\alpha)} \sim \begin{cases} \frac{\pi}{2x^{1/2}} & \alpha < 0 \\ \frac{\pi}{4x^{1/2}} & \alpha = 0 \\ \frac{\pi}{2x^{\alpha+1/2}} & \alpha > 0 \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale è convergente se e solo se $\alpha+1/2 > 1$, ovvero $\alpha \in (1/2, +\infty)$.

(08/09)

(*) Determinare (purché esistano) i valori di $\alpha \in (0, +\infty)$ per i quali il seguente integrale improprio converge:

$$\int_1^2 \frac{(x-1)^{5\alpha}}{(x^\alpha - 1)^{3/2}}\, dx\ .$$

....

La funzione integranda è continua in $(1, 2]$. Poiché $\alpha > 0$, si ha

$$x^\alpha - 1 = (1 + (x-1))^\alpha - 1 = \alpha(x-1)(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad x \to 1$$

e quindi

$$\frac{(x-1)^{5\alpha}}{(x^\alpha - 1)^{3/2}} = (x-1)^{5\alpha - 3/2}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad x \to 1^+\ .$$

Perció, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio converge se e solo se $5\alpha - 3/2 > -1$, ovvero se e solo se $\alpha > 1/10$.

(08/09)

(*) Determinare (purché esistano) i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali il seguente integrale improprio converge:

$$\int_1^\infty \frac{e^{(3\alpha-5)x}}{x^\alpha}\, dx\ .$$

....

Risposta: $\alpha \in (-\infty, 5/3]$.

---

9. Calcolo differenziale per funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$

(05/06)

(*) Dire se esiste una funzione $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa le tre seguenti proprietà:

- $f \in C^1(D)$;
- $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$;
- f non è monotona in D

(in caso affermativo fornire un esempio, in caso negativo motivare la risposta).

....

Risposta: Si. La funzione $f(x) = -1/x$ verifica le proprietà richieste.

(*) Sia $f : \text{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x - \log(xy^2)\ ;$$

determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

....

Si ha $f(1,1) = 1$ e

$$f_x(x,y) = 1 - \frac{1}{x}, \quad f_y(x,y) = -\frac{2}{y} \quad \forall (x,y) \in \mathrm{dom}\, f$$

da cui $f_x(1,1) = 0$ e $f_y(1,1) = -2$. Perciò il piano tangente ha equazione

$$z = 1 - 2(y-1) = 3 - 2y.$$

(*) Determinare (se esistono) i punti critici della seguente funzione:

$$f(x,y) = e^{y^2-x}(4y - 7x).$$

....

Si ha:

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= e^{y^2-x}(7x - 4y - 7) \\ f_y(x,y) &= 2e^{y^2-x}(4y^2 - 7xy + 2). \end{cases}$$

Perciò

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 7x - 4y = 7 \\ y(4y - 7x) = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x - 4y = 7 \\ -7y = -2 \end{cases}$$

da cui segue che l'unico punto critico è $(57/49, 2/7)$.

(08/09)

(*) Determinare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = y^2 - x^2 y - \frac{1}{3}x^3.$$

....

Risposta: $(0,0)$ e $(-1, 1/2)$.

(*) Siano $\mathbf{w} = (2,-1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy^2 - \arctan(xy)\ .$$

Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,-2)$.

....

Si ha $\mathbf{v} = (2,-1)/\sqrt{5}$ e

$$\nabla f(x,y) = \left(y^2 - \frac{y}{1+x^2y^2}\ ,\ 2xy - \frac{x}{1+x^2y^2} \right).$$

Perciò

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,-2) = \langle \nabla f(1,-2), \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle (4 + 2/5, -4 - 1/5), (2,-1) \rangle = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

(08/09)

(*) Sia $\mathbf{v} = (1,1)/\sqrt{2}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \log\left(2 + \sin\left(x^2\right)\right) - \frac{x}{1+y^2}\ .$$

Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\sqrt{\pi}, -1)$.

....

Risposta: $-\frac{3\sqrt{\pi}+1}{2\sqrt{2}}$.

(05/06)

(*) Fornire l'esempio di una funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ che nel punto $(0,0)$ non è continua ma è derivabile nel punto $(0,0)$ lungo la direzione $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$; verificare che la f prescelta soddisfa tali proprietà .

. . . .

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \text{ e } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è continua in $x = 0$ in quanto

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x>0, y=0}} = 1 \neq 0 = f(0,0),$$

ma è derivabile nella direzione $\mathbf{v}$ in quanto

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t/\sqrt{5}, -2t/\sqrt{5}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

(*) Determinare, se esistono, i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2(x+y) - y^2 - 4y$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y \leq 1\}.$$

. . . .

Si determinano anzitutto i punti stazionari:

$$\begin{cases} x(3x+2y) = 0 \\ -2y + x^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} 2y = -3x \\ -2y + x^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Sommando e due equazioni del secondo sistema e risolvendo l'equazione risultante, si ottiene che i punti stazionari sono $(0,-2)$, $(1,-3/2)$ e $(-4,6)$.
Nessuno dei tre punti è interno a D; perciò i punti di massimo e minimo assoluto (che esistono per il teorema di Weierstrass) si trovano sulla frontiera di D. Su $x = 0$ si ha $f(0,y) = -y^2 - 4y$ che è decrescente per $y \in [0,1]$; su $y = 0$ si ha $f(x,0) = x^3$ che è crescente per $x \in [0,1]$; su $x + y = 1$ si ha $f(1-y,y) = (1-y)^2 - y^2 - 4y = 1 - 6y$ che è decrescente per $y \in [0,1]$. Combinando queste informazioni si conclude che $(1,0)$ è punto di massimo assoluto e $(0,1)$ è punto di minimo assoluto.

(*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + x^2y - 4y \; ;$$

determinare (se esistono) i punti di massimo locale e i punti di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.

. . . .

Risposta: $(0,2)$ punto di minimo locale, $(0,-2)$ punto di massimo locale ($(4,-2)/\sqrt{5}$ e $(-4,2)/\sqrt{5}$ punti di sella).

(05/06)

(*) Determinare gli eventuali punti di massimo locale, di minimo locale e di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) \;=\; x(x-y)e^{-(x+y)} \;.$$

. . . .

Risposta: $(0, 0)$ punto di sella, $(1/2, 3/2)$ punto di minimo locale.

---

10. Integrali doppi

(*) Determinare l'area del seguente insieme:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; 5|x| - 2 \le y \le 3\}.$$

. . . .

Un grafico qualitativo elementare mostra che D è un triangolo di vertici $(0, -2)$, $(1, 3)$, $(-1, 3)$. Quindi l'area è 5.

(*) Determinare l'area del seguente insieme: (08/09)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; -1 \le y \le 2,\; 1 - x \le y \le 6 - x\}.$$

. . . .

Risposta: 15.

(*) Calcolare

$$\iint_D |2x + y| \; dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; x \ge 0,\; y \ge 0,\; x + 2y \le 1\}.$$

. . . .

Si ha $2x + y \ge 0$ in D. Perciò

$$\begin{aligned}
\iint_D |2x + y| dxdy \;&=\; \int_0^{1/2} \int_0^{1-2y} (2x + y) dx \; dy \\
&=\; \int_0^{1/2} \left((1 - 2y)^2 + y - 2y^2\right) dy \\
&=\; \frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

(*) Calcolare (05/06)

$$\int \int_D |x - y| \, dxdy \;, \qquad D \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; x^2 \le y \; e \; x \ge y\} \;.$$

. . . .

Si ha

$$\begin{aligned}\int\int_D |x-y|\,dxdy &= \int_0^1\int_{x^2}^x (x-y)\,dy\,dx \;=\; \int_0^1 \left[-\frac{1}{2}(x-y)^2\right]_{y=x^2}^{y=x} dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= \frac{1}{60}.\end{aligned}$$

(*) Calcolare

$$\iint_D y\,dxdy, \qquad D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |y-1|\le x\le 2\ ,\ \ y\le 2\Big\}.$$

. . . .

Si ha $|y-1|\le 2$ se e solo se $-1\le y\le 3$. Quindi D si riscrive come dominio semplice come segue:

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[-1,2],\ |y-1|\le x\le 2\Big\}.$$

Perciò

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \int_{-1}^2\int_{|y-1|}^2 y\ dx\ dy\\ &= \int_{-1}^2 y(2-|y-1|)dy\\ &= \int_{-1}^1 y(1+y)dy+\int_1^2 y(3-y)dy\\ &= \left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=1}+\left(\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2}\\ &= 17/6.\end{aligned}$$

(*) Calcolare (08/09)

$$\iint_D x\ dxdy\ ,\quad D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le 5x\le y\le 2x+3\big\}\ .$$

. . . .

Poiché

$$5x\le 2x+3 \iff x\le 1,$$

si ha

$$D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,1],\ 5x\le y\le 2x+3\big\}\ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\iint_D x\ dxdy &= \int_0^1\int_{5x}^{2x+3} x\ dy\ dx\\ &= \int_0^1 3x(1-x)\ dx\\ &= 1/2.\end{aligned}$$

(*) Calcolare l'area del seguente insieme:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - 1| \le y \le 5 - x^2\right\}.$$

....

A è simmetrico rispetto all'asse $x = 0$; inoltre

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 1 \ge 0 \\ x^2 - 1 \le 5 - x^2 \end{array}\right\} \iff 1 \le x^2 \le 3, \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 - 1 \le 0 \\ 1 - x^2 \le 5 - x^2 \end{array}\right\} \iff x^2 \le 1,$$

quindi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}],\ |x^2 - 1| \le 5 - x^2\}$$

(lo studente verifichi per via grafica) e

$$\begin{aligned} |A| &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \int_{|x^2-1|}^{5-x^2} dydx = 2\int_0^1 \int_{1-x^2}^{5-x^2} dydx + 2\int_1^{\sqrt{3}} \int_{x^2-1}^{5-x^2} dydx \\ &= 2\int_0^1 4dx + 2\int_1^{\sqrt{3}} (6 - 2x^2)dx = 8 + 12(\sqrt{3} - 1) - \frac{4}{3}(3\sqrt{3} - 1) \\ &= \frac{8}{3}(3\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

(05/06)

(*) Calcolare l'area della seguente regione piana:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \le \sqrt[3]{x}(1 - \sqrt[3]{x})\}.$$

....

Risposta: 3/10.

(*) Calcolare

$$\iint_D |x + y|\ dxdy,$$

dove

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

....

Passando in coordinate polari, si ha

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \iint_D |x + y|\ dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 r^2 |\cos\theta + \sin\theta|\ drd\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 |\cos\theta + \sin\theta|\ d\theta \\ &= \frac{7}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\sin\theta + \cos\theta)d\theta - \frac{7}{3}\int_{3\pi/4}^{\pi} (\sin\theta + \cos\theta)d\theta \\ &= \frac{7}{3} \cdot 2 \cdot (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

(*) Sia
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}\ ;$$
calcolare
$$\iint_D \left| x^2+y^2-\frac{1}{4} \right|\ dxdy\ .$$

. . . .

Risposta: $5\pi/64$.

---

11. Equazioni differenziali ordinarie

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale ordinaria:
$$z'(t) + 2z(t) = e^{-t}\log(3e^t+2)\ .$$

. . . .

Si tratta di una EDO lineare del primo ordine. L'equazione omogenea associata ha integrale generale $z_o(t) = Ce^{-2t}$. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $z_p(t) = C(t)e^{-2t}$; sostituendo si ottiene
$$C'(t)e^{-2t} = e^{-t}\log(3e^t+2) \iff C'(t) = e^t\log(3e^t+2).$$
Integrando,
$$\begin{aligned}
C(t) &= \int e^t \log(3e^t+2)\,dt \overset{y=e^t}{=} \int \log(3y+2)\,dy \\
&= y\log(3y+2) - \int \frac{3y}{3y+2}dy = y\log(3y+2) - \int\left(1-\frac{2}{3y+2}\right)dy \\
&= y\log(3y+2) - y + \frac{2}{3}\log(3y+2) \\
&= (e^t+\frac{2}{3})\log(3e^t+2) - e^t.
\end{aligned}$$
Pertanto l'integrale generale cercato è:
$$z(t) = Ce^{-2t} + (e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-3t})\log(3e^t+2) - e^{-t},\ C\in\mathbb{R}.$$

(05/06)

(*) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y''(t) + y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = \sin(t).$$

. . . .

Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm i)$. Quindi l'omogenea associata ha integrale generale
$$y_o(t) = e^{-t/2}(C_1\cos(t/2) + C_2\sin(t/2)).$$
Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di somiglianza:
$$y_p(t) = A\cos t + B\sin t,$$
da cui sostituendo si ottiene
$$(-\frac{1}{2}A+B)\cos t + (-\frac{1}{2}B-A)\sin t = \sin t \iff A = -\frac{5}{4},\ B = -\frac{5}{8}.$$

Pertanto l'integrale generale è

$$y(t) = e^{-t/2}(C_1 \cos(t/2) + C_2 \sin(t/2)) - \frac{5}{8}(2\cos t + \sin t).$$

---

*) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale (08/09)

$$y''(t) + 8\,y'(t) + 25\,y(t) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$.

. . . .

Risposta: $y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t}\sin(3t)$.

(*) (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = te^t \ ;$$

(b) tra le soluzioni ottenute al punto (a) determinare, se esistono, quelle per le quali esiste $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

. . . .

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Il polinomio caratteristico soddisfa

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 1 \pm i,$$

quindi l'omogenea associata ha integrale generale $y_o(t) = e^t(A\cos t + B\sin t)$. Una soluzione particolare (che si determina con il metodo di somiglianza) è data da $y_p(t) = te^t$. Pertanto

$$(a): \quad y(t) = e^t(A\cos t + B\sin t + t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) è verificata da tutte le soluzioni:

$$e^t(A\cos t + B\sin t + t) = te^t(1 + o(1)) \to +\infty \quad \text{per} \quad t \to +\infty \quad \forall\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: (08/09)

$$y''(x) + 8y'(x) + 25y(x) = \cos x.$$

. . . .

Riposta: $y(x) = e^{-4x}(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)) + (3\cos x + \sin x)/80$.

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale ordinaria:

$$y'''(x) - 2y'(x) = e^{-3x}.$$

. . . .

Ponendo $y' = z$, si ottiene un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti:

$$z'' - 2z = e^{-3x}. \qquad (\heartsuit)$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è

$$z_o(x) = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x}.$$

Per determinare una soluzione particolare si può utilizzare il metodo di variazione delle costanti. In alternativa, una soluzione particolare si ottiene con metodo ad-hoc: posto $z_p = Ce^{-3x}$, si ottiene

$$z_p'' - 2z_p = (9C - 2C)e^{-3x} \overset{!}{=} e^{-3x} \iff C = 1/7.$$

Perciò l'integrale generale di (♡) è

$$z(x) = z_0(x) + z_p(x) = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{7}e^{-3x}.$$

Integrando, si ottiene la risposta:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 - \frac{1}{21}e^{-3x}.$$

(05/06)

(*) (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{t^2+2}y \;=\; \frac{1}{t^2+2}\;;$$

(b) risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{t^2+2}y \;=\; \dfrac{1}{t^2+2} \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

. . . .

(a) Si tratta di un'equazione del primo ordine lineare. Risolvendo l'omogenea per separazione di variabili, si ottiene $y_o(t) = 0$ oppure

$$\begin{aligned} \log|y_o(t)| \;&=\; \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t/\sqrt{2})^2+1}\,dt \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) + C,\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ovvero

$$y_o(t) = C\,e^{\mathrm{arctg}}(t/\sqrt{2}),\ C \in \mathbb{R}.$$

La soluzione particolare è immediata: $y_p(t) = 1$ (che si può ovviamente anche ottenere con il metodo di variazione delle costanti). Pertanto l'integrale generale è

$$y(t) = 1 + C\,e^{\mathrm{arctg}}(t/\sqrt{2}),\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) La soluzione del problema di Cauchy deve verificare $1 = 1 + Ce^{\mathrm{arctg}}(-1/\sqrt{2})$, da cui $C = 0$ e quindi $y(t) = 1$.

(*) Determinare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy, specificandone il dominio massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}\,y^2\,e^{-1/y}\sin(x/2) \\ y(0) = -\frac{1}{\log 2}\ . \end{cases}$$

. . . .

Per separazione di variabili:

$$-e^{1/y} + C = \int \frac{y'e^{1/y}\ dx}{y^2} = \int \frac{1}{2}\sin(x/2)\ dx = -\cos(x/2) + C,$$

ovvero
$$y(x) = \frac{1}{\log(\cos(x/2) + C)},$$
e da $y(0) = -\frac{1}{\log 2}$ segue $C = -1/2$. Perciò
$$y(x) = \frac{1}{\log(\cos(x/2) - 1/2)},$$
il cui dominio naturale è $D = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x/2) > 1/2\}$; perciò il dominio massimale di esistenza della soluzione è $(-2\pi/3, 2\pi/3)$.

(*) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(3 + y(t)) \\ y(0) = -6 \end{cases}$$
specificando il dominio massimale di esistenza della soluzione.

. . . .

L'integrale generale si determina per separazione di variabili:
$$\int \frac{dy}{y(y+3)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+3} \right) = \frac{1}{3} \log \left(\frac{y}{y+3} \right)$$
da cui
$$\log \left(\frac{y(t)}{y(t)+3} \right) = 3t + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y(t)}{y(t)+3} = Ke^{3t}$$
$$\Longleftrightarrow \quad y(t) = \frac{3Ke^{3t}}{1 - Ke^{3t}}, \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
a cui bisogna aggiungere le soluzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = -3$. Sostituendola condizione iniziale si ottiene $K = 2$, quindi la soluzione è
$$y(t) = \frac{6e^{3t}}{1 - 2e^{3t}}$$
il cui intervallo massimale di esistenza è $(-\frac{1}{3} \log 2, \infty)$.

(*) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione: (08/09)
$$\begin{cases} y' = y^2 - 7y + 12 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

. . . .

Risposta: $y(x) = (6e^x - 4)/(2e^x - 1)$, $I = (-\log 2, +\infty)$.

(*) Determinare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{x-2} \\ y(1) = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

. . . .

Risposta: $y(x) = 1/(3 + \log(2 - x))$, $I = (-\infty, 2 - e^{-3})$.

(*) Risolvere il problema di Cauchy (05/06)

$$\begin{cases} y'(t) &= t + t(y(t))^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

....

Risposta: $y(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t^2}{2}\right)$, $t \in I = \left(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\right)$.
