ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 08.02.10

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente 3 esercizi contrassegnati dall'asterisco (*) e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

(1)* Determinare il dominio naturale D, l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 6x + e^{-2x} \ .$$

.... 7 punti

Risposta:

$D = \mathbb{R}$, $\sup f = +\infty$, $\inf f = 3(1 - \log 3)$.

....

Svolgimento:

Analogo alla prova pratica del 08.01.2010.

(2)* Determinare il carattere (convergente, divergente o irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(3k \sin\left(\frac{1}{4k}\right)\right)^k .$$

. . . . 7 punti

Risposta:

Convergente.

. . . .

Svolgimento:
La serie è a termini positivi, quindi si può utilizzare il criterio della radice:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(3k \sin\left(\frac{1}{4k}\right)\right)^k} &= \lim_{k\to+\infty} 3k \sin\left(\frac{1}{4k}\right) \\
&= \lim_{k\to+\infty} 3k \sin\left(\frac{1}{4k}(1+o(1))\right) \\
&= \frac{3}{4} < 1
\end{aligned}$$

pertanto la serie è convergente.

(3)* Calcolare
$$\int_{-3}^{0} e^{|x+2|}\,dx\ .$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$e^2 + e - 2.$

. . . .

Svolgimento:
Si ha $x + 2 > 0$ se e solo se $x > -2$. Perciò
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0} e^{|x+2|}\,dx &= \int_{-3}^{-2} e^{-x-2}\,dx + \int_{-2}^{0} e^{x+2}\,dx\\ &= -e^{-x-2}\Big|_{-3}^{-2} + e^{x+2}\Big|_{-2}^{0}\\ &= e^2 + e - 2.\end{aligned}$$

(4)* Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y' = y^8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$y(x) = (3^{-7} - 7x)^{-1/7}$, $I = (-\infty, 3^{-7}/7)$.

. . . .

Svolgimento:

Si tratta di una equazione del primo ordine a variabili separabili. Si ha $y^8 = 0$ se e solo se $y = 0$, e

$$\int 1\,dx - \int y^{-8}(x)y'(x)\,dx = x - \int y^{-8}\,dy = x + \frac{1}{7}y^{-7} + C.$$

Perciò l'integrale generale è

$$y(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad y(x) = (C - 7x)^{-1/7}, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$3 = y(0) = C^{-1/7} \iff C = 3^{-7}.$$

Perciò la soluzione è $y(x) = (3^{-7} - 7x)^{-1/7}$, il cui dominio naturale è $\mathbb{R} \setminus \{3^{-7}/7\}$. Perciò l'intervallo massimale di esistenza è $(-\infty, 3^{-7}/7)$.

(5) Determinare il parametro reale α in modo che il numero complesso

$$w = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1-i\alpha}$$

abbia argomento $\pi/3$. Per tale valore di α determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$e^{iz} = 2w\,.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$\alpha = \sqrt{3}$, $z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi - i\log 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

. . . .

Svolgimento:

Effettuando la divisione si ottiene

$$w = \frac{1+i\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Si nota che $|w| = 1$. Perciò w ha argomento $\pi/3$ se e solo se

$$w = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

da cui segue immediatamente che $\alpha = \sqrt{3}$.

Posto $z = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned} 2w = e^{iz} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)} = e^{-y}e^{ix} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = -\log 2,\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$