ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — SOLUZIONI — 28.01.2013

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente e completamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 6 domande numerate da 1 a 6.

VERSIONE PRELIMINARE — SI PREGA DI SEGNALARE EVENTUALI ERRORI

(1) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e gli eventuali punti di massimo locale e di minimo locale della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f(x) = e^{x^3-2x^5}.$$

.... 6 punti

Risposta:
$\sup f = +\infty$, $\inf f = 0$, $x = -\sqrt{\frac{3}{10}}$ punto di minimo locale, $x = \sqrt{\frac{3}{10}}$ punto di massimo locale

....

Svolgimento:

Si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \left(3x^2 - 10x^4\right) e^{x^3-2x^5} = x^2\left(3 - 10x^2\right) e^{x^3-2x^5},$$

perciò

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{10}}, \sqrt{\frac{3}{10}}\right].$$

La funzione è quindi decrescente in $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}})$, crescente in $\left[-\sqrt{\frac{3}{10}}, \sqrt{\frac{3}{10}}\right]$ e decrescente in $(\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty)$. Infine

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

La risposta segue dalle precedenti informazioni.

Si osservi che il punto $x = 0$ è un punto critico di $f(x)$ ma non è né un punto di massimo locale né un punto di minimo locale (è un punto di flesso a tangente orizzontale).

(2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x}-2x\right).$$

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:
5/4

. . . .

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x}-2x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2\left(1+\frac{5}{4x}\right)}-2x\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}2x\left[\left(1+\frac{5}{4x}\right)^{1/2}-1\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty}2x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{4}\left(1+o(1)\right)=\frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2 + 2|x| + 2x + 4}.$$

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:
$\frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}$

. . . .

Svolgimento:

Cenno: la risposta segue osservando che

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2 + 2|x| + 2x + 4} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2 + 4} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x+2)^2}$$

Il primo integrale si calcola mediante la sostituzione $x = 2t$, mentre il secondo è elementare.

(4) Determinare il carattere (convergente, divergente, irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[2 - \cos\left(k^{-4/5}\right) - \cos\left(k^{-4/7}\right) \right].$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:
convergente

....

Svolgimento:

La serie è a termini positivi. Posto $y = \frac{1}{k} \to 0$ per $k \to +\infty$, si ha

$$\begin{aligned}
2 - \cos\left(y^{4/5}\right) - \cos\left(y^{4/7}\right) &= 2 - \left[1 - \frac{1}{2}y^{8/5} + o\left(y^{8/5}\right)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}y^{8/7} + o\left(y^{8/7}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}y^{8/5} + o\left(y^{8/5}\right) + \frac{1}{2}y^{8/7} + o\left(y^{8/7}\right) \\
&= \frac{1}{2}y^{8/7} + o\left(y^{8/7}\right) = \frac{1}{2}y^{8/7}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad y \to 0.
\end{aligned}$$

Quindi

$$2 - \cos\left(k^{-4/5}\right) - \cos\left(k^{-4/7}\right) = \frac{1}{2}k^{-8/7}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad k \to +\infty.$$

La risposta segue utilizzando il criterio del confronto asintotico.

(5) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \left(6y^4 - 5x^2 y\right)^{1/3}$$

e sia $\mathbf{v}$ il versore che ha come direzione la bisettrice del secondo e quarto quadrante e come verso quello delle x decrescenti. **Utilizzando la definizione di derivata direzionale**, calcolare $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0)$.

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: $-5^{1/3}/2^{1/2}$.

. . . .

Svolgimento:

Si ha $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) &:= \lim_{t \to 0} \frac{f(-t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}) - f(0, 0)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\left(6t^4/4 - 5t^3/(2\sqrt{2})\right)^{1/3}}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \left(6t/4 - 5/(2\sqrt{2})\right)^{1/3} \\
&= -5^{1/3}/2^{1/2}.
\end{aligned}$$

(6) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = (2x-3)\, e^{-y(x)/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:
$y(x) = 2\log\left(\frac{x^2-3x+2}{2}\right)$, $I = (-\infty, 1)$

. . . .

Svolgimento:

L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$e^{y(x)/2} y'(x) = 2x - 3 \Longrightarrow 2e^{y(x)/2} = x^2 - 3x + C$$

e dalla condizione iniziale segue che $C = 2$. Pertanto

$$y(x) = 2\log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2}\right).$$

Tale funzione è definita se $x^2 - 3x + 2 > 0$, ovvero se $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. L'intervallo massimale che contiene $x = 0$ è $(-\infty, 1)$.