ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 04.06.2013 A

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente e completamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 6 domande numerate da 1 a 6.

(1) Determinare l'estremo inferiore, l'estremo superiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f(x) = \arctan(x + x^2), \quad x \in (-\infty, 2].$$

.... 6 punti

Risposta:

$\sup f = \pi/2$, $\inf f = f(-1/2) = \arctan(-1/4)$, $x = -1/2$ punto di minimo locale (e assoulto), $x = 2$ punto di massimo locale.

....

Svolgimento:

(2) Calcolare (purché esista) il seguente limite:

$$\lim_{x\to(1/3)^+}\left(\frac{e^{3x-1}-1}{3x-1}\right)^{\frac{1}{\log(3x)}}.$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

$e^{1/2}$.

....

Svolgimento:
Ponendo $y = 3x - 1$, si ha

$$\lim_{x\to(1/3)^+}\left(\frac{e^{3x-1}-1}{3x-1}\right)^{\frac{1}{\log(3x)}} = \lim_{y\to0^+}\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)^{\frac{1}{\log(1+y)}}.$$

Si ha

$$\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)^{\frac{1}{\log(1+y)}} = e^{\frac{\log\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}{\log(1+y)}}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\log\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}{\log(1+y)} &= \frac{\log\left(\frac{y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)}{y}\right)}{y(1+o(1))} \\
&= \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}y+o(y)\right)}{y(1+o(1))} = \frac{\frac{1}{2}y+o(y)}{y(1+o(1))} \\
&= \frac{1}{2}(1+o(1)) \quad \text{per} \quad y\to 0,
\end{aligned}$$

da cui segue la risposta.

(3) Determinare i numeri complessi z che soddisfano la seguente equazione:

$$z^3\overline{z} + 16i = 0.$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

$z = \pm\sqrt{2}(1-i)$

....

Svolgimento:
Ponendo $z = re^{i\theta}$, si ha $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Quindi

$$\begin{aligned} z^3\overline{z} = -16i \quad &\iff \quad r^4 e^{2i\theta} = 16e^{i\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)} \\ &\iff \quad r = 2,\ \theta = \frac{3}{4}\pi + k\pi, \end{aligned}$$

ovvero $z = \pm\sqrt{2}(1-i)$.

(4) Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-3kx}}{2^{3k+1}}.$$

. . . . 6 punti

Risposta:

$x > \log \frac{1}{2}$.

. . . .

Svolgimento:

(5) Fra le primitive F della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \min\{0, x\},$$

determinare quella tale che $F(0) = 1$.

. . . . 6 punti

Risposta:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; x \in [0, +\infty) \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{se } \; x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

. . . .

Svolgimento:

Le primitive F di f sono continue in $\mathbb{R}$ e tali che

$$F'(x) = \min\{0, x\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x \in (0, +\infty) \\ x & \text{se } \; x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} C_1 & \text{se } \; x \in (0, +\infty) \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2 & \text{se } \; x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

e la continuità in $x = 0$ implica che $C_1 = C_2$. Pertanto le primitive di f sono tutte e sole del tipo

$$F(x) = \begin{cases} C & \text{se } \; x \in [0, +\infty) \\ \frac{1}{2}x^2 + C & \text{se } \; x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Scegliendo C in modo tale che $F(0) = 1$ si ottiene la risposta.

(6) Determinare l'area del dominio naturale $D \subseteq \mathbb{R}^2$ della funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sqrt{3 - |x+y|} + \log(xy-2).$$

. . . . 6 punti

Risposta:

$|D| = 3 - 4\log 2.$

. . . .

Svolgimento:
Si ha

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x+y| \leq 3, \ xy > 2\right\}.$$

D è simmetrico rispetto all'origine (ovvero $(x,y) \in D \iff (-x,-y) \in D$). Un semplice grafico qualitativo mostra che $D \cap \{x > 0\}$ è semplice rispetto a entrambi gli assi, per esempio

$$D \cap \{x > 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in (1,2), \ \frac{2}{x} < y \leq 3 - x\right\}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |D| &= 2\int_1^2 \int_{2/x}^{3-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= 6x - x^2 - 4\log x\Big|_1^2 = 12 - 4 - 4\log 2 - 6 + 1 = 3 - 4\log 2. \end{aligned}$$