ANALISI MATEMATICA — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA PRATICA — 10.07.2013 **B**

VERSIONE PRELIMINARE

Cognome: .... Nome: ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrá verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare gli eventuali punti di massimo locale, gli eventuali punti di minimo locale e gli eventuali punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy\left(y^2 + x - 1\right).$$

.... 7 punti

Risposta: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ punti di sella

$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ punto di minimo locale

$\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ " massimo locale

....

Svolgimento:

$$\nabla f = \underline{0} \iff \begin{cases} y^3 + 2xy - y = y\left(y^2 + 2x - 1\right) = 0 \\ 3xy^2 + x^2 - x = x\left(3y^2 + x - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 = 1 - 2x \\ x\left(3 - 6x + x - 1\right) = x\left(2 - 5x\right) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$P_1 = (0,0) \qquad P_3 = (0,1), \quad P_4 = (0,-1)$$
$$P_2 = (1,0) \qquad P_5 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad P_6 = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 3y^2 + 2x - 1 \\ 3y^2 + 2x - 1 & 6xy \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sella}$$

$$D^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sella}$$

$$D^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ sella}$$

$$D^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ sella}$$

$$D^2 f\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{12}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ min loc.}$$

$$D^2 f\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{12}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ max. loc.}$$

(2) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 \leq 4y^3 \leq 4\right\}.$$

a) Calcolare la lunghezza di $\partial\Omega$.

b) Calcolare

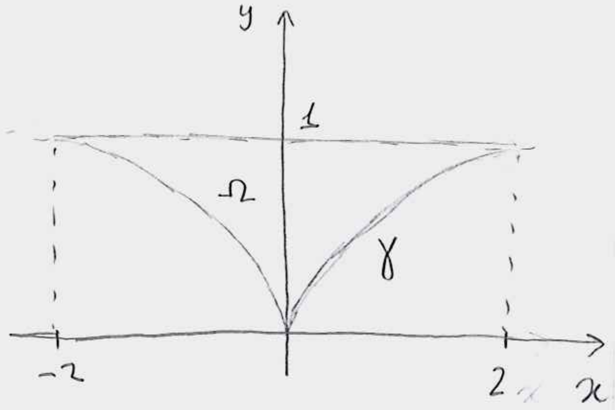
$$\int_{\partial\Omega^+} y^2 x \mathrm{d}y.$$

7 punti

Risposta: $|\partial\Omega| = 4 + \frac{4}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$

$\int_{\partial\Omega^+} xy^2 dy = \frac{8}{9}$

Svolgimento:



$$|\partial\Omega| = 4 + 2|\gamma|$$

$$|\gamma| = \int_\gamma ds = \int_0^1 |\dot\gamma| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1+9t} \, dt = \frac{2}{27}(1+9t)^{3/2} \Big|_0^1$$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = \left(2t^{3/2}, t\right)$

$\dot\gamma(t) = \left(3t^{1/2}, 1\right)$

$|\dot\gamma| = \sqrt{1+9t}$

$$\int_{\partial\Omega^+} xy^2 dy = \iint_\Omega y^2 dx dy = 2\int_0^1 \left(\int_0^{2y^{3/2}} y^2 dx\right) dy$$

$$= 4\int_0^1 y^{7/2} dy = \frac{8}{9} y^{9/2} \Big|_0^1$$

(3) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \le x^2 + z^2 \le 4, \ \sqrt{3}z \le y \le x\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta:

$$|\Omega| = \frac{28}{3}$$

....

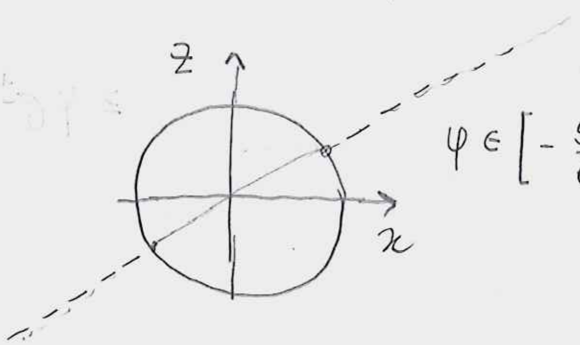
Svolgimento:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$1 \le x^2 + z^2 \le 4 \iff r \in [1,2]$$

$$\sqrt{3}\,x \le y \le x \iff \begin{cases} \sqrt{3}\,r\sin\varphi \le y \le r\cos\varphi \\ \sqrt{3}\sin\varphi \le \cos\varphi \end{cases}$$

$$\sqrt{3}\sin\varphi = \cos\varphi$$
$$\iff \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\iff \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$$



$$\varphi \in \left[-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$|\Omega| = \int_1^2 \int_{-5/6\pi}^{\pi/6} \left(\int_{\sqrt{3}\,r\sin\varphi}^{r\cos\varphi} r \, dy \right) d\varphi \, dr$$

$$= \int_1^2 \int_{-5/6\pi}^{\pi/6} r^2 (\cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi) \, d\varphi \, dr$$

$$= \frac{7}{3} \Big[\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi \Big]_{-5/6\pi}^{\pi/6}$$

$$= \frac{7}{3} (1 + 3)$$

(4) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy^5y' = 3y^6 - 2x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}.$$

7 punti

Risposta:

$$y(x) = \left(\left(2^6 - \frac{3}{4}\right) x^{18} + \frac{3}{4} x^2 \right)^{1/6}$$

Svolgimento:

Posto $v = y^6$, si ottiene

$$\frac{x}{6} v' = 3v - 2x^2 \quad , \quad v(1) = 2^6$$

$$\frac{x}{6} v_0' = 3v_0 \iff \frac{v_0'}{v_0} = \frac{18}{x} \iff \log|v_0| = 18 \log|x|$$
$$\iff v_0 = C x^{18} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$v_p = C(x) x^{18}$$
$$v_p' = C'(x) x^{18} + 18\, C(x) x^{17}$$
$$\frac{x}{6} v_p' - 3v_p = \frac{C'}{6} x^{19} + \cancel{3C x^{18}} - \cancel{3C x^{18}} = -2x^2$$
$$\iff C' = -12 x^{-17} \quad , \quad C = \frac{12}{16} x^{-16} = \frac{3}{4} x^{-16}$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{3}{4} x^2 \qquad \text{« Controllo: } \frac{x}{6} \cdot \left(\frac{3}{2} x\right) = \frac{9}{4} x^2 - 2x^2 \text{ OK »}$$

Quindi $v(x) = Cx^{18} + \frac{3}{4} x^2 , \; C \in \mathbb{R}$

e da $v(1) = C + \frac{3}{4} \stackrel{!}{=} 2^6$ si ottiene $C = 2^6 - \frac{3}{4}$

da cui segue la risposta.