ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — PROVA SCRITTA — 03.06.2014 | B

Cognome: .... Nome: ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = xy(x - y + 2)$ e sia Ω il triangolo chiuso di vertici $(0, 0)$, $(-2, 0)$ e $(0, 2)$. Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f in Ω.

.... 6 punti

Risposta:

$$\max_{\Omega} f = 0 \quad , \quad \min_{\Omega} f = -8/27 .$$

....

Svolgimento:

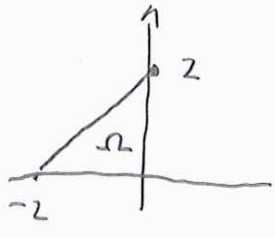
- Punti critici interni:

$$\begin{cases} f_x = 2xy - y^2 + 2y = y(2x - y + 2) \overset{!}{=} 0 \\ f_y = x^2 - 2xy + 2x = x(x - 2y + 2) \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x(x - 4x - 4 + 2) = x(-3x - 2) = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$ $\notin \mathring{\Omega}$

$P = \underline{(-2/3, 2/3)} \in \mathring{\Omega}$



- Punti di non differenziabilità: $\emptyset$

- $\partial\Omega$: $f \equiv 0$ su $\partial\Omega$

Per il teorema di Weierstrass, i punti di massimo e minimo assoluto esistono e per il teorema di Fermat gli unici candidati sono P e $\partial\Omega$:

$$f(-2/3, 2/3) = -8/27$$

$$f|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

da cui segue la risposta.

(2) Sia ω la seguente forma differenziale:

$$\omega(x,y) = \left(\frac{2x-9}{x^2+y^2-9x} + x\right)\mathrm{d}x + \frac{2y}{x^2+y^2-9x}\mathrm{d}y.$$

(a) Determinare un insieme semplicemente connesso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui ω è esatta e disegnare E;

(b) determinare in E una funzione potenziale di ω;

(c) calcolare

$$\int_{\gamma^+} (\omega + 2y\mathrm{d}x)\,, \quad \gamma^+(t) = (3+t^2, t),\ t \in [0,1].$$

8 punti

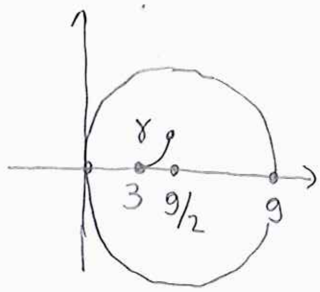
Risposta: $E = \{(x-9/2)^2 + y^2 < 81/4\}$

$U(x,y) = \log|x^2+y^2-9x| + \frac{x^2}{2} + C$ | $\int_{\gamma^+} \omega + 2y dx = \log\frac{19}{18} + \frac{29}{6}$

Svolgimento:

$\text{dom}\, \omega = \{x^2+y^2-9x \neq 0\} = \{(x-9/2)^2+y^2 \neq 81/4\}$

$E = \{(x-9/2)^2+y^2 < 81/4\}$



(ma non è l'unica risposta possibile; si noti però che $\{(x-9/2)^2+y^2 > 81/4\}$ non è semplicemente connesso),

$$U(x,y) = \int\left(\frac{2x-9}{x^2+y^2-9x} + x\right)dx = \log|x^2+y^2-9x| + \frac{x^2}{2} + C_1(y)$$

$$U_y = \frac{2y}{x^2+y^2-9x} + C'(y) \overset{!}{=} \frac{2y}{x^2+y^2-9x} \iff C(y) = C \in \mathbb{R}.$$

Quindi ω è esatta in E e U è una sua funzione potenziale.
Perciò, poiché $\text{im}\,\gamma \subset E$,

$$\int_{\gamma^+} \omega + 2y\,dx = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) + \int_0^1 2t\cdot(2t)\,dt$$
$$= U(4,1) - U(3,0) + \frac{4}{3}$$
$$= \log\frac{19}{18} + 8 - \frac{9}{2} + \frac{4}{3}$$

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\iiint_\Omega \frac{|x+y|}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2\le 1,\, y\le x,\, |z|\le 1\right\}.$$

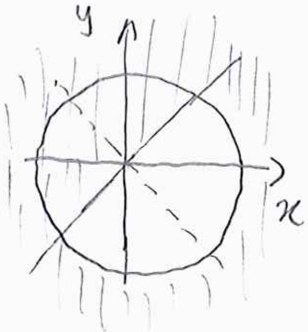
.... 6 punti

Risposta:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

....

Svolgimento:



$$\Omega = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D, \ -1\le z\le 1 \right\}$$

$$D = \left\{ x^2+y^2\le 1, \ y\le x \right\}$$

$$\iiint_\Omega \frac{|x+y|}{1+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_D |x+y|\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+z^2}\,dz\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D |x+y|\,\frac{\pi}{2}\,dx\,dy$$

In coordinate polari,

$$(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\in D \iff \rho\in[0,1], \ \varphi\in\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$$

Per trattare il valore assoluto, si può sia distinguere i due casi $\left(\varphi\in\left[-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \text{ e } \varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right)$ oppure osservare che sia il dominio che la funzione sono simmetrici rispetto a $x+y=0$: quindi

$$\frac{\pi}{2}\iint_D |x+y|\,dx\,dy = \pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^1 \rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}.$$

3/5

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'' = 2x(y')^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1/9 \end{cases} .$$

7 punti

Risposta:

$$y(x) = \frac{1}{6}\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| \quad , \quad I = (-3,3).$$

Svolgimento:

Ponendo $v(x) = y'(x)$, si ottiene

$$\begin{cases} v' = 2x\,v^2 \\ v(0) = 1/9 \end{cases} \iff \quad v \equiv 0 \text{ oppure } \int \frac{v'}{v^2}\,dx = \int 2x\,dx$$

$$-\frac{1}{v} = x^2 + C$$

e imponendo $v(0) = \frac{1}{9}$, $-9 = C$. Quindi

$$y'(x) = v(x) = \frac{1}{9-x^2}$$

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x}\right)dx = \frac{1}{6}\log\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C_1$$

e imponendo $y(0) = 0$ si ottiene

$$y = \frac{1}{6}\log\left|\frac{3+x}{3-x}\right|$$

Poiché $\operatorname{dom}\left(\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right|\right) = (-\infty,-3) \cup \underbrace{(-3,3)}_{\ni 0} \cup (3,+\infty)$,

$I = (-3,3)$.