ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — PROVA SCRITTA — 02.07.2014

B

Cognome: .... Nome: ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Verificare che l'equazione

$$x^3 + x - \cos(5y) + 3y = -1$$

definisce implicitamente una funzione $y = h(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$. Determinare inoltre il polinomio di Taylor di ordine due centrato in $x_0 = 0$ della funzione h.

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$T_2(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{25}{27}\cdot\frac{x^2}{2}$$

....

Svolgimento:

$$f(x,y) = x^3 + x - \cos(5y) + 3y + 1$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 1$$

$$f_y(x,y) = 5\sin(5y) + 3$$

$f_y(0,0) = 3 \neq 0 \implies$ h è ben definita.

Si ha $h(0) = 0$,

$$h'(x) = -\frac{f_x(x,h(x))}{f_y(x,h(x))} = -\frac{3x^2+1}{5\sin(5h(x))+3} \implies h'(0) = -\frac{1}{3},$$

$$h''(x) = -\frac{6x\,(5\sin(h(x))+3) - (3x^2+1)\,25\cos(5h(x))\cdot h'(x)}{(5\sin(5h(x))+3)^2}$$

$$\implies h''(0) = -\frac{-25\cdot 1\cdot(-1/3)}{9} = -\frac{25}{27}$$

da cui segue la risposta.

(2) Calcolare il baricentro del seguente insieme:

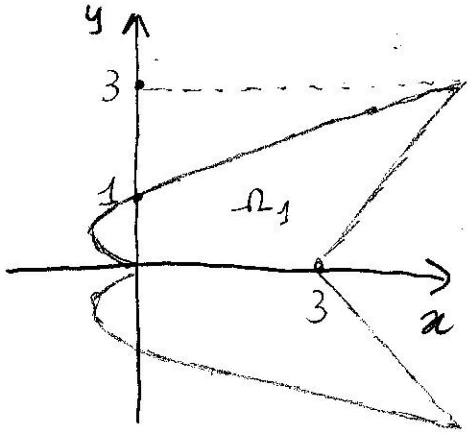
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y|^2 - |y| \le x \le |y| + 3\}$$

7 punti

Risposta:

$$(x_B, y_B) = (51/20 , 0)$$

Svolgimento:



Ω è simmetrico rispetto a $y=0$

$\Rightarrow y_B = 0$

Sia $\Omega_1 = \Omega \cap \{y>0\}$. Si ha

$$|\Omega| = 2|\Omega_1| = 2\int_0^3 \int_{y^2-y}^{y+3} dx\, dy$$

$y^2 - y = y+3$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y+1)(y-3)=0$

$$= 2\int_0^3 (y+3-y^2+y)\,dy = 2\left[y^2 - y^3/3 + 3y\right]_0^3 = 18$$

Quindi

$$x_B = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega x\,dx\,dy = \frac{1}{9}\int_0^3 \int_{y^2-y}^{y+3} x\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 \left((y+3)^2 - (y^2-y)^2\right) dy = \frac{1}{18}\int_0^3 (\cancel{y^2} + 6y + 9 - y^4 + 2y^3 - \cancel{y^2})\,dy$$

$$= \frac{1}{18}\left[-y^5/5 + \frac{y^4}{2} + 3y^2 + 9y\right]_0^3 = \frac{1}{2\cdot 3^2}\left(-3^5/5 + \frac{3^4}{2} + 3^3 + 3^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{27}{5} + \frac{9}{2} + 6\right) = \frac{1}{20}(-54 + 45 + 60) = \frac{51}{20}$$

(3) Sia Σ^+ la superficie definita da

$$\Sigma^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2+y^2-1,\ x^2+4y^2 \le 1\}$$

orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_3 > 0$. Sia $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (-y, x, -y).$$

(a) Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ attraverso Σ^+.
(b) Calcolare la circuitazione di $\mathbf{V}$ lungo $\partial\Sigma^+$.

$\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$\int_\Sigma \underline{V} \cdot \underline{n}^+ \, dS = 0, \qquad \int_{\partial\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{t}^+ \, ds = \pi.$$

Svolgimento:

Σ è una superficie cartesiana parametrizzata da

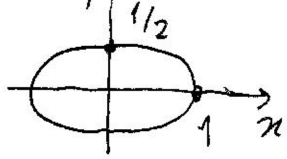
$$\sigma(x,y) = (x, y, x^2+y^2-1), \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \le 1\}.$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = (-2x, -2y, \underbrace{1}_{>0}) \implies \underline{n}^+ = \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$|\sigma_x \wedge \sigma_y| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$\int_\Sigma \underline{V} \cdot \underline{n}^+ \, dS = \iint_D (-y, x, -y) \cdot \frac{(-2x,-2y,1)}{\cancel{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \, dx\,dy$$

$$= \iint_D (2\cancel{x}y - 2\cancel{x}y - y) \, dx\,dy = 0$$



$\uparrow$ D simmetrico, y dispari

$$\int_{\partial\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{t}^+ \, ds \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Sigma \operatorname{rot}\underline{V} \cdot \underline{n}^+ \, dS = \iint_D (-1,0,2) \cdot \frac{(-2x,-2y,1)}{\cancel{\sqrt{\ }}} \cancel{\sqrt{\ }} \, dx\,dy$$

$$\operatorname{rot}\underline{V} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & -y \end{pmatrix} = (-1, 0, 2)$$

$$= \iint_D (2x+2) \, dx\,dy \overset{\text{D simm, } x \text{ dispari}}{=} 2|D| = \pi$$

(4) Risolvere ~~il~~ UNO DEI seguenti problemi di Cauchy, determinando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} yy'' = 2y'(y'-4) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} yy'' = 2y'(y'-4) \\ y(0)=1,\ y'(0)=5 \end{cases}$$

6 punti

Risposta: $y_1(x) = 4x, \ x \in \mathbb{R}$

$y_2(x) = 2\,\mathrm{tg}\left(2x + \mathrm{atg}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{atg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{atg}\frac{1}{2}\right)$

Svolgimento:

Il primo problema ha una soluzione banale, $y(x) = 4x$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

Per il secondo si può procedere, essendo una equazione autonoma, mediante la sostituzione $v(y) = y'(x(y))$, oppure procedere per separazione di variabili. Utilizzo il secondo metodo:

$$\frac{y''}{y'-4} = \frac{2y'}{y} \iff \log|y'-4| = \log y^2 + C$$

$$\left.\begin{aligned} &\iff |y'-4| = Cy^2 \\ &|y'(0)-4| = 1 = C\cdot 1 \iff C = 1 \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} &|y'-4| = y^2 \\ &y'(0) = 5 > 4 \end{aligned}$$

$$y' - 4 = y^2 \iff y' = y^2+4 \iff \frac{y'}{y^2+4} = 1$$

$$\text{“}\int \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{2}\right)^2+1}\text{”} = \frac{1}{2}\mathrm{atg}\left(\frac{y}{2}\right) + C \qquad \iff \quad \frac{1}{2}\mathrm{atg}\left(\frac{y}{2}\right) = x + C$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{atg}\left(\frac{1}{2}\right) = C$$

$$\Rightarrow \mathrm{atg}\frac{y}{2} = 2x + \mathrm{atg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow y = 2\,\mathrm{tg}\left(2x + \mathrm{atg}\left(\frac{1}{2}\right)\right), \qquad 2x \in \left(-\mathrm{atg}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}, -\mathrm{atg}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$