ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — PROVA SCRITTA — 18.09.2014

Cognome: .... Nome: ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 5x^2 + 4y^2 \le 9, \ y \ge -x\}$$

e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3.$$

Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f in Ω.

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

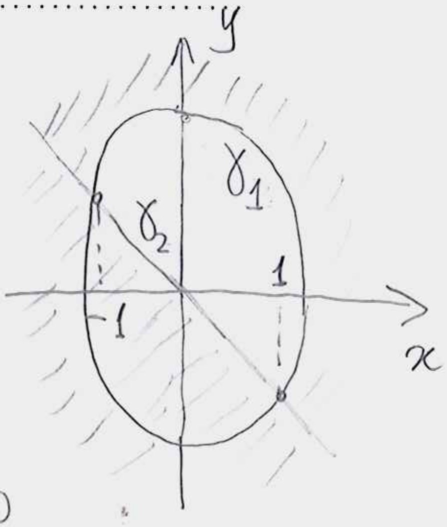
Risposta:

$$\max_{\Omega} f = \frac{3}{2}, \quad \min_{\Omega} f = -3$$

....

Svolgimento:

No punti stazionari interni, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
Sulla parte di $\partial\Omega$ contenuta nell'ellisse, γ_1, uso il metodo dei moltiplicatori:



$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 3 - \lambda(5x^2 + 4y^2 - 9)$$

$$\begin{cases} 2x - 10\lambda x = 0 \\ 2y - 8\lambda y = 0 \\ 5x^2 + 4y^2 - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1-5\lambda) = 0 \\ 2y(1-4\lambda) = 0 \\ 5x^2 + 4y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 3/2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 3/\sqrt{5} \end{cases}$$

N

$(x,y) = (0,0) \notin \gamma_1$

$$P_1 = \left(0, \frac{3}{2}\right), \quad P_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

Sulla parte di $\partial\Omega$ contenuta nella retta, γ_2, uso il metodo diretto

$$g_2(x) = f(x,y)\big|_{\gamma_2} = 2x^2 - 3 \quad , \quad x \in [-1,1]$$

$$g_2'(x) = 4x \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0 \qquad P_3 = (0,0)$$

Quindi i candidati sono

$$P_1 = \left(0, \frac{3}{2}\right), \; P_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, 0\right); \; P_3 = (0,0)$$

e i punti di intersezione di γ_1 e γ_2, $P_{4,5} = (\pm 1, \mp 1)$

Calcolando i valori,

$$f(P_1) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

$$f(P_2) = \frac{18}{5} - 3 = \frac{3}{5}$$

$$f(P_3) = -3$$

$$f(P_{4,5}) = -1$$

si ottiene la risposta

(2) Sia $Q \subset \mathbb{R}^2$ il quadrato di vertici $(0,0)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$ e sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + 2x\right)\mathrm{d}x + \frac{3\alpha x}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale ω è esatta in $\mathbb{R}^2$; in corrispondenza di tale valore, determinare una funzione potenziale di ω.

(b) Determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale

$$\int_{\partial Q^+} \omega = \pi.$$

7 punti

Risposta: (a) $\alpha = 1/3$, $U(x,y) = \mathrm{atg}(xy) + x^2$

(b) $\alpha = 5/3$.

Svolgimento:

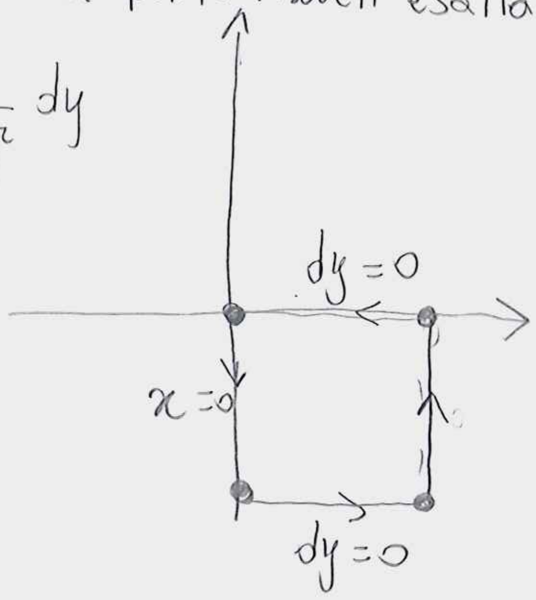
(a) $$U(x,y) = \int \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx + \int 2x\,dx = \mathrm{atg}(xy) + x^2 + C(y)$$

$$U_y = \frac{x}{1+x^2y^2} + C'(y) \overset{!}{=} \frac{3\alpha x}{1+x^2y^2} \iff \alpha = 1/3, \quad C \equiv c$$

(b) Aggiungo e tolgo $\frac{x}{1+x^2y^2}dy$ in modo che una parte risulti esatta:

$$\int_{\partial Q^+} w = \int_{\partial Q_+} \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + 2x\right)dx + \frac{x}{1+x^2y^2}dy$$

$$+ \int_{\partial Q_+} \frac{(3\alpha - 1)x}{1+x^2y^2}dy$$



usando (a)

$$= \int_{\partial Q_+} \frac{(3\alpha-1)x}{1+x^2y^2}dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{3\alpha - 1}{1+y^2}dy = -(3\alpha-1)\,\mathrm{atg}(-1) = (3\alpha-1)\frac{\pi}{4} \overset{!}{=} \pi$$

$\iff 3\alpha = 5$

(3) Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(0,0)$ $(2,0)$, $(0,1)$ e sia Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z^2 - x^2 - y^2 = 0, \; z > 0, \; (x,y) \in T\right\}.$$

Calcolare

$$\int_\Sigma x^2 y \mathrm{d}S.$$

.... 7 punti

Risposta:

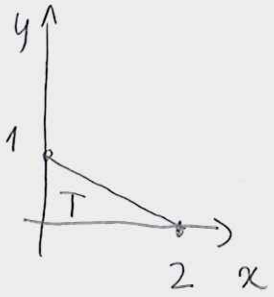
$$\frac{2}{15}\sqrt{2}.$$

....

Svolgimento:

Si tratta di una superficie cartesiana:

$$(x,y) \in T, \quad \underset{z>0}{\underset{\uparrow}{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$$



quindi $\quad \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{1+|\nabla f|^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$,

da cui

$$\iint_\Sigma x^2 y \, dS = \iint_T x^2 y \sqrt{2} \, dx dy$$

$$= \sqrt{2}\int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} x^2 y \, dy \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2 x^2\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{20}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{8}{3} - 4 \underset{3/5}{+} \frac{8}{5}\right)$$

(4) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = x^4 - 1.$$

.... 7 punti

Risposta:

$$y(x) = \frac{A}{x} + Bx^4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}x^4 \log x \,.$$

....

Svolgimento:

$$s = \log x \quad , \quad \hat{y}(s) = y(e^s)$$

$$x = e^s \qquad\qquad y(x) = \hat{y}(\log x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{ds} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2\hat{y}}{ds^2} - \frac{1}{x^2}\frac{d\hat{y}}{ds}$$

Quindi:

$$\frac{d^2\hat{y}}{ds^2} - 3\frac{d\hat{y}}{ds} - 4\hat{y} = e^{4s} - 1$$

OMOGENEA:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)$$

$$\hat{y}_0(s) = Ae^{-s} + Be^{4s}$$

Soluzioni particolari:

$$\frac{d^2}{ds^2}\hat{y}_{p1} - 3\frac{d\hat{y}_{p1}}{ds} - 4\hat{y}_{p1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \hat{y}_{p1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2\hat{y}_{p2}}{ds^2} - 3\frac{d\hat{y}_{p2}}{ds} - 4\hat{y}_{p2} = e^{4s}$$

$$\hat{y}_{p2} = Kse^{4s}$$

$$\frac{d}{ds}y_{p2} = Ke^{4s}(1+4s)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}y_{p2} = Ke^{4s}(8+16s)$$

$$ke^{4s}(8 + \cancel{16s} - 3 - \cancel{12s} - \cancel{4s}) = e^{4s} \qquad k = 1/5$$