ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 26.01.2017	~~B~~

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione funzione definita da $f(x,y) = xy^3 + x^3y$.

a) Determinare i punti critici di f e stabilirne la natura *usando la definizione*.

b) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di f nel seguente insieme:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1,\, x \geq 0,\, x \geq y\right\}.$$

7 punti

Risposta: $(0,0)$ punto di sella

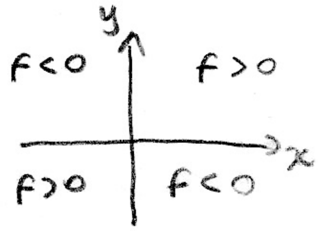
$\max_D f = \frac{1}{2}$, $\min_D f = -\frac{1}{2}$

Svolgimento:

(a) $\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y^3+3x^2y = y(y^2+3x^2)=0 \\ 3xy^2+x^3 = x(3y^2+x^2)=0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0)$

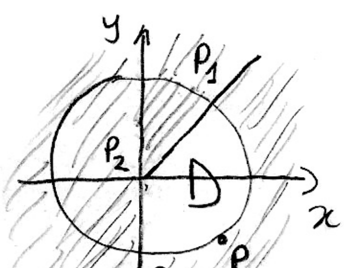
$f(x,y) = xy(x^2+y^2) \implies$ segni come in figura

$f(0,0) = 0$



$\implies (0,0)$ punto di sella

(b) "Vertici": $P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (-1,0)$



$g_1(\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

$g_1'(\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0 \iff \varphi = \pm\frac{\pi}{4}$

$\implies P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, P_1

$g_2(x) = f(x,x) = 2x^4 \quad x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \implies P_2, P_1$

$g_3(y) = f(0,y) = 0$ tutti candidati

$f(P_2)=0$, $f(P_3)=0$, $f(P_1)=\frac{1}{2}$, $f(P_4) = -\frac{1}{2}$

(2) Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(1 + \frac{y^2}{1+x^2}, b(x, y)\right),$$

dove $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile tale che $b(0, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

a) Determinare $b(x, y)$ in modo tale che $\mathbf{F}$ sia irrotazionale.

b) Per tale scelta di $b(x, y)$, calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (e^{t^2-t}, t^2 + 2t)$ e orientata nel verso delle t crescenti.

7 punti

Risposta: (a) $b(x,y) = 2y \, \mathrm{atg}(x)$

(b) $\frac{9\pi}{4}$.

Svolgimento:

(a) $$\left(1 + \frac{y^2}{1+x^2}\right)_y = \frac{2y}{1+x^2} \overset{!}{=} \frac{\partial b}{\partial x}(x,y)$$

$$\iff b(x,y) = \int \frac{2y}{1+x^2}\, dx = 2y \, \mathrm{atg}(x) + C(y)$$

$$b(0,y) = 0 \iff C(y) = 0 \quad \Rightarrow b(x,y) = 2y \, \mathrm{atg}(x)$$

(b) $$U(x,y) = \int \left(1 + \frac{y^2}{1+x^2}\right) dx = x + y^2 \mathrm{atg}\, x + C(y)$$

$$U_y(x,y) = 2y \, \mathrm{atg}\, x + C'(y) \overset{!}{=} 2y \, \mathrm{atg}\, x \iff C'(y) = 0$$

$$\Rightarrow U(x,y) = x + y^2 \mathrm{atg}\, x + C,$$

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{t} \, ds = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U(1,3) - U(1,0)$$

$$= 1 + 9 \, \mathrm{atg}\, 1 - 1 = \frac{9\pi}{4}.$$

(3) Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ il triangolo di vertici $A := (0,0,0)$, $B := (1,1,0)$, $C := (1,1,1)$ e sia $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (xy, z^2, y).$$

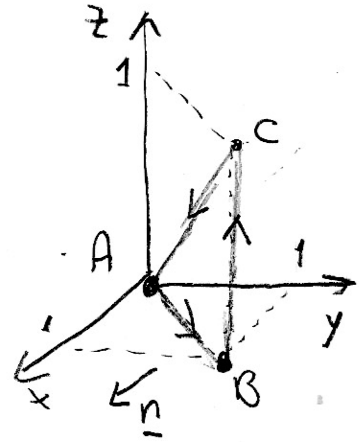
Calcolare la circuitazione di $\mathbf{V}$ lungo ∂T, orientata nel verso ABC.

$\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta: $1/6$.

Svolgimento:

Risolubile con calcolo diretto o teorema del rotore. Utilizzo il secondo



$$\int_{\partial T} \underline{V} \cdot \underline{t} = \iint_T \operatorname{rot} \underline{V} \cdot \underline{n} \, dS$$

$$T = \{ \underbrace{(x,x,z)}_{= \sigma(x,z)} : (x,z) \in D \}, \quad D = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], \ 0 \le z \le x \}$$

$\sigma_x = (1,1,0)$
$\sigma_z = (0,0,1)$ $\quad \sigma_x \wedge \sigma_z = (1,-1,0)$ $\quad$ orientazione coerente: $\underline{n} = \dfrac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$

$$\iint_T \operatorname{rot} \underline{V} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_D \operatorname{rot} \underline{V} \cdot \frac{(\sigma_x \wedge \sigma_z)}{\cancel{|\sigma_x \wedge \sigma_z|}} \cancel{|\sigma_x \wedge \sigma_z|} \, dx\, dz$$

$$\operatorname{rot} \underline{V} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & z^2 & y \end{pmatrix} = (1-2z, 0, -x)$$

$$\operatorname{rot} \underline{V} \cdot \underline{n} = 1 - 2z$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (1-2z)\, dz\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6}.$$

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{\tan x} y^2(x) \\ y\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{2}{\log 2} \end{cases}.$$

6 punti

Risposta: $y(x) = -\dfrac{1}{\log|\sin x|}$, $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

Svolgimento:

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{y'\,dx}{y^2} = \int \frac{1\,dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{C - \log|\sin x|}$$

$$y\left(\tfrac{7}{4}\pi\right) = \frac{1}{C - \log\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} = \frac{1}{C - \log(2^{-1/2})}$$

$$= \frac{1}{C + \frac{1}{2}\log 2} = \frac{2}{\log 2} \quad \Longleftrightarrow \quad C = 0$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{\log|\sin x|}$$

$\log|\sin x| = 0 \Longleftrightarrow |\sin x| = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

$|\sin x| = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi$

$$\Longrightarrow \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$