ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 24.01.2019 ~~A~~

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Calcolare l'area della seguente superficie:

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{3}{2}x\right) \right\}.$$

6 punti

Risposta: $\frac{8}{3}\pi\sqrt{2}$

Svolgimento:

Σ è una superficie cartesiana:

$$\Sigma = \{ (x, y, \sqrt{x^2+y^2}) : (x,y) \in D \}$$

con $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{3}{2}x\right) \right\}$

Si ha

$$\begin{aligned}(x,y)\in D &\iff x^2+y^2 \leq \frac{1}{3}\left(1+3x+\frac{9}{4}x^2\right)\\ &\iff \frac{x^2}{4} - x + y^2 \leq \frac{1}{3}\\ &\iff x^2-4x+4y^2 \leq 4/3\\ &\iff (x-2)^2+4y^2 \leq 16/3,\end{aligned}$$

quindi

$$D = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+4y^2 \leq \frac{16}{3} \right\}$$

Perciò

$$|\Sigma| = \iint_D \sqrt{1+|\nabla f|^2}\; dx\,dy \quad , \qquad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\nabla f(x,y)| = 1$$

$$= \sqrt{2}\,|D|$$

D è un ellisse di semiassi $\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Pertanto $|\Sigma| = \sqrt{2}\cdot\pi\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{2}$.

(2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y) = \left(\; xy^2 f''(y) \; , \; -\frac{2}{3} y f(y) \; \right).$$

a) Determinare l'unica funzione f che verifica tutte e tre le seguenti condizioni: $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(1) = 1$ e $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$;

b) per tale funzione f, calcolare

$$\int_{\gamma^+} \mathbf{V} \cdot (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x), \quad \gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t), \; t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

.... 5+2 punti

Risposta: (a) $f(y) = y^2$

(b) $4/3$

....

Svolgimento:

(a) $\operatorname{div} \underline{V} = 0 \iff y^2 f''(y) - \frac{2}{3}\frac{d}{dy}(yf(y)) = 0$

$\iff y^2 f''(y) - \frac{2}{3} y f'(y) - \frac{2}{3} f(y) = 0 \qquad (*)$

Cambio variabile : $\quad y = e^s, \quad v(s) = f(e^s)$

$v'(s) = e^s f'(e^s)$

$v''(s) = e^s f'(e^s) + e^{2s} f''(e^s) \overset{(*)}{=} \frac{5}{3} v'(s) + \frac{2}{3} v(s)$

$\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda - \frac{2}{3} = 0$

$\Delta = \frac{25}{9} + \frac{4 \cdot 2}{3} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$

$\lambda = \left(\frac{5}{3} \pm \frac{7}{3}\right)\frac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$

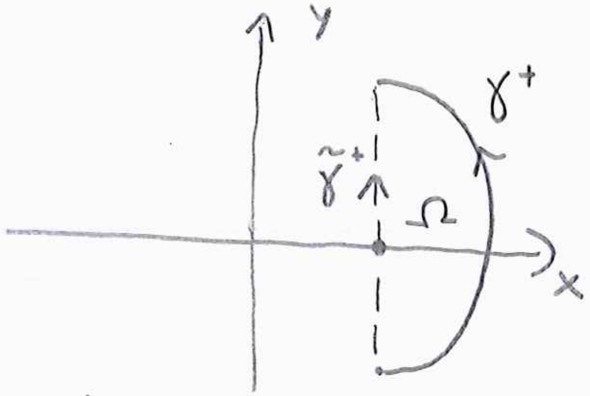
Quindi $\quad v(s) = A e^{-s/3} + B e^{2s}$

$f(y) = \frac{A}{\sqrt[3]{y}} + B y^2$

$f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow A = 0 \qquad f(1) = 1 \Rightarrow B = 1$

(b) Per calcolare

$$\int_{\gamma^+} \underline{V} \cdot (dy, -dx)$$



conviene utilizzare $\operatorname{div} \underline{V} = 0$. Definendo Ω come in figura, si ha

$$0 = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V} \, dx dy = \int_{\partial\Omega^+} \underline{V} \cdot \underline{n} \, ds$$

$$= \int_{\gamma^+} \underline{V} \cdot (dy, -dx) - \int_{\tilde{\gamma}^+} \underline{V} \cdot (dy, 0)$$

Quindi

$$\int_{\gamma^+} \underline{V} \cdot (dy, -dx) = \int_{\tilde{\gamma}^+} 2x y^2 \, dy = \int_{-1}^{1} 2y^2 dy = \frac{4}{3}$$

In alternativa, si può calcolare direttamente, oppure osservare che

$$\int_{\gamma^+} \underline{V} \cdot (dy, -dx) = \int_{\gamma^+} (-V_2, V_1) \cdot (dx, dy)$$

e che $(-V_2, V_1)$ è conservativo, con $U(x,y) = \frac{2}{3} x y^3$;

quindi $\int_{\gamma^+} (-V_2, V_1) \cdot (dx, dy) = U(1,1) - U(1,-1) = 4/3$

(3) Siano $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^2$ e $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ gli insiemi definiti da

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy^4 - \frac{1}{4}x^4 y = 6\right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^5 - \frac{1}{4}x^3 y^2 = -3\right\}.$$

a) Determinare l'unico punto (x_0, y_0) di intersezione tra Γ_1 e Γ_2.

b) Mostrare che, in un intorno di (x_0, y_0), Γ_1 e Γ_2 sono il sostegno di due curve regolari γ_1 e γ_2.

c) Calcolare, a meno del segno, il coseno dell'angolo compreso tra i versori normali a γ_1 e γ_2 nel punto (x_0, y_0).

3+1+2 punti

Risposta: (a) $(x_0, y_0) = (2, -1)$.
(b) Si veda lo svolgimento.
(c) $\pm 3/\sqrt{10}$.

Svolgimento:

(a)
$$\begin{cases} xy^4 - \frac{1}{4}x^4 y = 6 \\ y^5 - \frac{1}{4}x^3 y^2 = -3 \end{cases}$$

Osservo che $y = 0$ oppure $x = 0$ non sono soluzioni, quindi moltiplico la seconda equazione per $\frac{x}{y}$:

$$xy^4 - \frac{1}{4}x^4 y = -\frac{3x}{y}$$

Sottraendo dalla prima equazione, ottengo

$$0 = 6 + \frac{3x}{y} \iff x = -2y$$

e sostituendo nella prima ottengo

$$-2y^5 - \frac{1}{4} \cdot 16y^5 = 6 \iff y = -1 \implies x = 2.$$

N.B. Ci sono almeno altri due modi per risolvere (a).

(b) Posto $g_1(x,y) = xy^4 - \frac{1}{4}x^4y - 6$

$g_2(x,y) = y^5 - \frac{1}{4}x^3y^2 + 3$

si ha $g_i(x_0,y_0) = 0$ (per (a)) e

$$\nabla g_1(x,y) = \left(y^4 - x^3y,\ 4xy^3 - \frac{1}{4}x^4\right) \Rightarrow \nabla g_1(2,-1) = \overset{\underline{V}_1}{\overset{\shortparallel}{(9,-12)}} \neq \underline{0}$$

$$\nabla g_2(x,y) = \left(-\frac{3}{4}x^2y^2,\ 5y^4 - \frac{1}{2}x^3y\right) \Rightarrow \nabla g_2(2,-1) = \underset{\underline{V}_2}{\underset{\shortparallel}{(-3,9)}} \neq \underline{0}$$

Quindi (b) è vera per il Teorema di Dini

(c) $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono vettori normali a Γ_1, risp. Γ_2.

Quindi $\cos\theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{|V_1||V_2|} = \frac{(3,-4)\cdot(-1,3)}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{15}{5\sqrt{10}}$,

$\underline{v}_1 = 3(3,-4)$

$\underline{v}_2 = 3(-1,3)$

(4) Per ciascun valore di $m \in [0, +\infty)$, si calcoli il baricentro $(x(m), y(m))$ dell'insieme

$$\Omega_m = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 1 \leq y \leq -m|x| + 1\right\}.$$

Quanto vale $\inf_{m \geq 0} y(m)$?

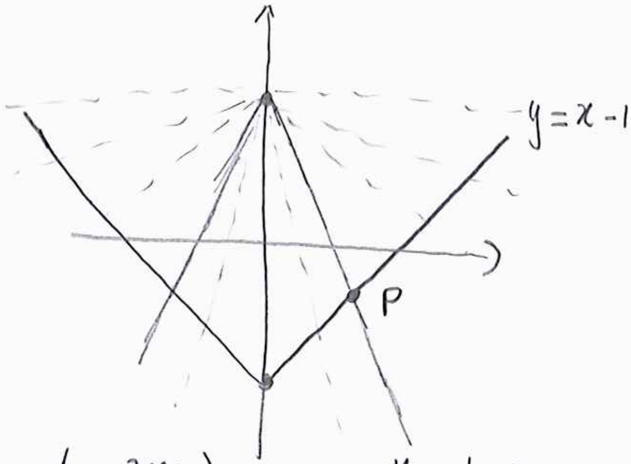
.... 6 punti

Risposta: $\inf_{m \geq 0} y(m) = -\frac{1}{3}$

....

Svolgimento:

Per simmetria, $x(m) = 0$. Considero



$\tilde{\Omega}_m = \Omega_m \cap \{x \geq 0\}$.

Intersezione: $x - 1 = 1 - mx$

$\iff x = \frac{2}{m+1}$ $\qquad P = \left(\frac{2}{m+1}, 1 - \frac{2m}{m+1}\right)$

$$|\tilde{\Omega}_m| = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{2}{m+1}\right) = \frac{2}{m+1}$$

$$y(m) = \frac{m+1}{2} \cdot \iint_{\tilde{\Omega}_m} y \, dx dy = \frac{m+1}{2} \int_0^{\frac{2}{m+1}} \int_{x-1}^{1-mx} y \, dy \, dx$$

$$= \frac{m+1}{4} \int_0^{\frac{2}{m+1}} \left(\cancel{1} - 2mx + m^2 x^2 - x^2 + 2x - \cancel{1}\right) dx$$

$$= \frac{m+1}{4} \int_0^{\frac{2}{m+1}} (m^2 - 1) x^2 - 2(m-1) x \, dx$$

$$= \left(\frac{m+1}{4}\right)(m-1) \left[\frac{m+1}{3} x^3 - x^2\right]_0^{2/(m+1)}$$

$$= \frac{(m+1)(m-1)}{4} \left[\frac{8}{3} - 4\right] \frac{1}{(m+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{m-1}{m+1}$$