

Cognome: ..... VERSIONE ..... Nome: ..... PRELIMINARE .....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Calcolare il baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq 2y, 1 - y \leq x \leq 2(1 - y) \}.$$

6 punti

Risposta:

$$(x_B, y_B) = \left( \frac{13}{18}, \frac{1}{2} \right)$$

Svolgimento:

Per simmetria,  $y_B = \frac{1}{2}$ .

$$y = 2(1-y) \Leftrightarrow y = 2 - 2y \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$$

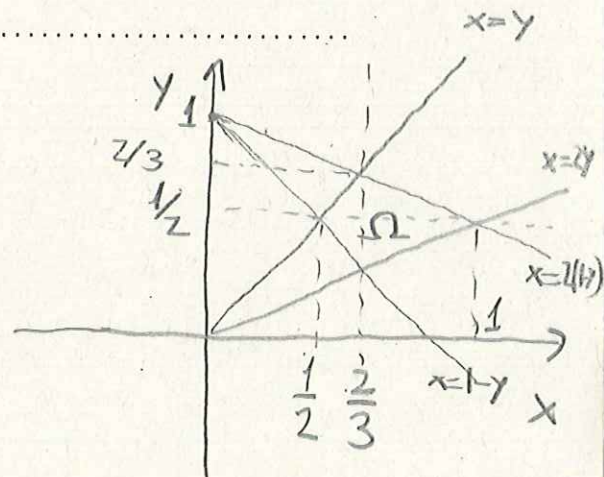
$$|\Omega| = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}$$

$$x_B = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} x \, dx \, dy = 12 \cdot 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \int_y^{2(1-y)} x \, dx \, dy$$

$$= 12 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} [4(1-y)^2 - y^2] \, dy = 12 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (4 - 8y + 3y^2) \, dy$$

$$= 12 \left[ 4y - 4y^2 + y^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} = 12 \left[ \frac{8}{3} - \frac{16}{9} + \frac{8}{27} - 2 + 1 - \frac{1}{8} \right]$$

$$= 12 \left[ \frac{72 - 48 + 8}{27} - \frac{9}{8} \right] = 12 \left[ \frac{32}{27} - \frac{9}{8} \right] = \frac{13}{18} \quad 1/5$$



(2)

a) Determinare  $A \in \mathbb{R}$  in modo tale che il campo vettoriale definito da

$$V(x, y) = (2x - 4x^3 - 4xy^2, 2y - 4y^3 - Ax^2y).$$

sia conservativo in  $\mathbb{R}^2$ ;

b) per tale valore di  $A$ , determinare i punti di massimo locale della funzione potenziale.

6 punti

Risposta:

a)  $A=4$

b)  $\left\{ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \right\}$

Svolgimento:

$$U(x, y) = \int (2x - 4x^3 - 4xy^2) dx = x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + C(y)$$

$$U_y(x, y) = -4x^2y + C'(y) \stackrel{V}{=} 2y - 4y^3 - Ax^2y$$

$$\Leftrightarrow A=4, \quad C'(y) = 2y - 4y^3 \Rightarrow C = y^2 - y^4$$

Quindi  $A=4$  e

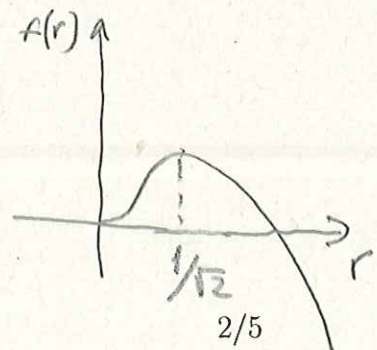
$$\begin{aligned} U(x, y) &= x^2 + y^2 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 \\ &= (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

$U$  è radiale:  $U(x, y) = f(r)$ ,  $f(r) = r^2 - r^4$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f'(r) = 2r - 4r^3 = 0 \Leftrightarrow r=0, r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi i punti di massimo locale (e assoluto) sono

$$\left\{ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \right\}$$



In alternativa si può studiare direttamente:

$$\begin{cases} U_x = 2x - 4x^3 - 4xy^2 = 2x(1 - 2x^2 - 2y^2) = 0 \\ U_y = 2y - 4y^3 - 4x^2y = 2y(1 - 2x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ oppure } (x, y) \in \{x^2 + y^2 = 1/2\} =: \Gamma$$

$$D^2U(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 12x^2 - 4y^2 & -8xy \\ -8xy & 2 - 12y^2 - 4x^2 \end{pmatrix}$$

$$D^2U(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 0) \text{ pto di min. loc.}$$

$$D^2U|_{\Gamma} = \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix}, \quad \det D^2U|_{\Gamma} = 64x^2y^2 - 64x^2y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} U - U|_{\Gamma} &= x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= - \left[ (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \right]^2 \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Gamma$  punti di massimo locale e assoluto.

- (3) Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(z) = 1 - z^2$  e sia  $\Sigma^+ \subset \mathbb{R}^3$  la superficie ottenuta ruotando il grafico di  $f$  di un angolo  $2\pi$  intorno all'asse  $z$ , orientata in modo che  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 \geq 0$ . Calcolare la circuitazione intorno a  $\partial\Sigma^+$  del campo vettoriale

$$\mathbf{V} = (-y(x^2 + y^2), x(x^2 + y^2), 0).$$

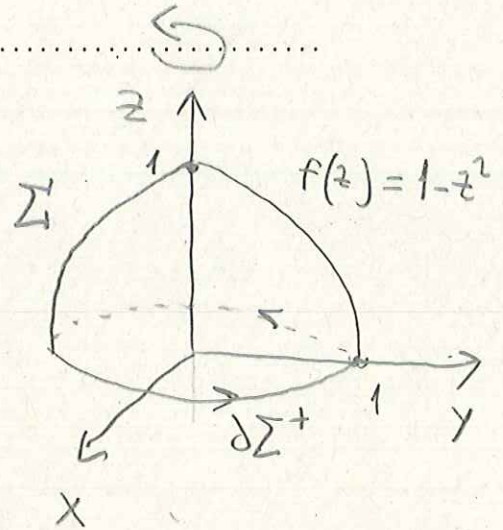
6 punti

Risposta:

$$-2\pi,$$

Svolgimento:

Si può sia utilizzare il teorema del rotore, sia la definizione. Poiché si vede subito che



$$\partial\Sigma^+ = \gamma \quad \gamma: \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

conviene usare il calcolo diretto (ma l'altra strada non è difficile).

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma^+} \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{t}}^+ ds &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{1}_{= \frac{2}{\sqrt{2}} / \sqrt{2}} dt = -2\pi. \end{aligned}$$

(4) Un punto  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  si muove nel piano partendo dal punto (1,1) con velocità

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = -\|\gamma(t)\|^{-4}\gamma(t)$$

e si ferma quando raggiunge (0,0).

a) Dopo quanto tempo si ferma?

b) Qual è stata la lunghezza del suo percorso?

[SUGG: QUALE EDD SODDISFA IL QUADRATO DELLA DISTANZA DEL PUNTO DA (0,0)?] 6 punti

Risposta:

a)  $t = 1$

b)  $L = \sqrt{2}$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\|\gamma(t)\|^2}{2} &= \gamma(t) \cdot \frac{d}{dt} \gamma(t) \\ &= -\|\gamma(t)\|^{-4} \gamma(t) \cdot \gamma(t) = -\|\gamma(t)\|^{-2} \end{aligned}$$

$$z(t) = \|\gamma(t)\|^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z'(t) &= -\frac{1}{z(t)} & \frac{1}{2} z(t) z'(t) &= -1 \\ \frac{z^2(t)}{4} &= -t + C \end{aligned}$$

$$z(0) = \|(1,1)\|^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = C$$

$$z^2(t) = 4(1-t)$$

a)  $z^2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

b) 
$$\int_0^1 \|\dot{\gamma}\| dt = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|^{-3} dt = \int_0^1 ((4(1-t))^{-3/4}) dt$$

$$= 4^{-3/4} \cdot 4 \cdot (1-t)^{1/4} \Big|_0^1 = 4^{1/4} = \sqrt{2}$$