ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 22.07.2022 **A**

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

È consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Siano

$$\mathbf{V}(x,y) = (9x^8 + 6y^2, Ax - \sin(y^2)), \qquad \gamma^+ = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0,\pi].$$

Determinare $A \in \mathbb{R}$ in modo tale che $\int_\gamma \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^+ ds = 0.$ 8 punti

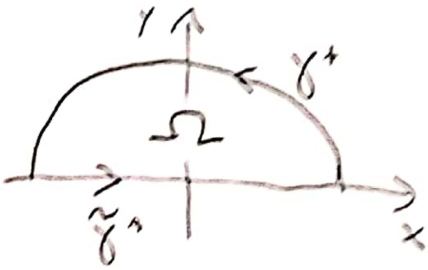
Risposta:

$$A = \frac{20}{\pi}$$

Svolgimento:

Si può procedere con il calcolo diretto (esercizio) oppure come segue:

$$\int_\gamma \underline{V}\cdot\underline{T}^+ ds = \iint_\Omega \mathrm{rot}\,\underline{V}\cdot\underline{e}_3\, dx\,dy - \int_{\tilde\gamma^+} \underline{V}\cdot\underline{T}^+ ds$$



Si ha

$$\iint_\Omega \mathrm{rot}\,\underline{V}\cdot\underline{e}_3\, dx\,dy = \iint_\Omega (A - 12y)\,dx\,dy = A\frac{\pi}{2} - \int_0^1\int_0^\pi 12\rho^2\sin\varphi$$

$$= \frac{A}{2}\pi - 12\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{A\pi}{2} - 8$$

e

$$\int_{\tilde\gamma^+} \underline{V}\cdot\underline{T}^+ ds = \int_{-1}^1 (9x^8, Ax)\cdot(1,0)\,dx = \int_{-1}^1 9x^8\,dx \underset{1/5}{=} 2$$

da cui segue la risposta $\left(\frac{A}{2}\pi - 8 - 2 = 0 \iff A = \frac{20}{\pi}\right)$

Scansionato con CamScanner

(2) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando l'insieme

$$D = \left\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \ 0 \le z \le \cos x\right\}$$

di un angolo giro intorno all'asse x. Calcolare $\displaystyle\iiint_\Omega y^2 |\sin x| \, dx dy dz$.

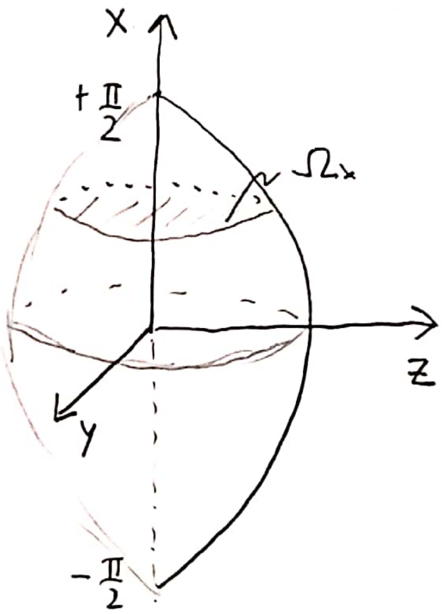
8 punti

Risposta:

$$\frac{\pi}{10}$$

Svolgimento:

Solido di rotazione $\Rightarrow$ per strati.



$$\Omega = \left\{ x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \ (y,z) \in \Omega_x \right\}$$

$$\Omega_x = \left\{ y^2 + z^2 \le \cos^2 x \right\}$$

Ω simmetrico rispetto a $x=0$,

$y^2|\sin x|$ pari rispetto a $x = 0$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega y^2 |\sin x| = 2 \iiint_{\Omega_+} y^2 \sin x \, dx \qquad \Omega_+ = \Omega \cap \{x > 0\}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \left(\iint_{\Omega_x} y^2 \, dy dz \right) dx$$

Si ha

$$\iint_{\Omega_x} y^2 \, dy dz = \int_0^{\cos x} \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2\varphi \, d\varphi \, d\rho = \frac{\pi}{4} \cos^4 x .$$

Quindi

$$\iiint_\Omega y^2 |\sin x| = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^4 x \, dx = \frac{\pi}{10} .$$

(3) Determinare l'integrale generale della seguente EDO:

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2x\log x, \qquad x > 0.$$

8 punti

Risposta:

$$y(x) = Ax + Bx\log x + \frac{1}{3}x\log^3 x$$

Svolgimento: EDO di tipo Eulero

$$v(s) = y(\underbrace{e^s}_{=x}) \qquad v'(s) = e^s y'(e^s) \qquad v''(s) = e^s y'(e^s) + e^{2s}y''(e^s)$$

$$\Rightarrow \qquad v''(s) - 2v'(s) + v(s) = 2se^s$$

- Omogenea: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 = (\lambda-1)^2$

$$v_0(s) = Ae^s + Bse^s$$

- Soluzione particolare: metodo di somiglianza

$\lambda = 1$ radice doppia $\Rightarrow$ si cerca $v_p(s)$ del tipo

$$v_p(s) = As\cdot s^2e^s = As^3e^s$$

$$v_p'(s) = Ae^s(3s^2+s^3)$$

$$v_p''(s) = Ae^s(6s+6s^2+s^3)$$

$$v_p'' - 2v_p' + v_p = Ae^s(6s + \cancel{6s^2} + \cancel{s^3} - \cancel{6s^2} - \cancel{2s^3} + \cancel{s^3})$$

$$= 6Ase^s \overset{!}{=} 2se^s \iff A = 1/3$$