ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 22.07.2022

$\boxed{\cancel{B}}$

Cognome: Versione Nome: Preliminare

È consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Determinare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y) = x^2y + xy^2$ su

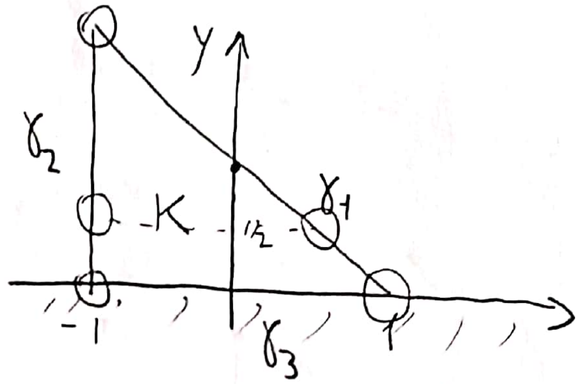
$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ x \geq -1\}.$$

8 punti

Risposta: $\max_K f = 1/4$ (in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-1, \frac{1}{2})$)

$\min_K f = -2$ (in $(-1,2)$)

Svolgimento: Punti critici interni:



$$\begin{cases} f_x = 2xy + y^2 = y(2x+y) = 0 \\ f_y = x^2 + 2xy = x(x+2y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x(x-2x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x,y) = (0,0) \notin \mathring{K}$$

$\boxed{\gamma_1}$ $g_1(x) = f(x, 1-x) = x^2(1-x) + x(1-x)^2 = x^2 - x^3 + x - 2x^2 + x^3$

$= x - x^2 \quad , \quad x \in [-1,1]$

$g_1'(x) = 1 - 2x \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr 1/2$

$(-1,2)$	candidato	min
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	"	max
$(1,0)$	"	min

$\boxed{\gamma_2}$ $g_2(y) = y - y^2 \ ; \quad y \in [0,1]$

$g_2'(y) = 1 - 2y \gtreqless 0 \iff y \lesseqgtr 1/2$

$(-1,0)$	"	min
$(-1, 1/2)$	"	max
$(-1,2)$	"	min

$\boxed{\gamma_3}$ $g_3(x) \equiv 0$ tutti candidati

Confronto: $f|_{\gamma_3} \equiv 0 \qquad f(-1,2) = 2 - 4 = -2$

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1/4$

$f(-1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1/4$

(2) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = 4(x + y(x))^2 \\ y(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

8 punti

Risposta: $y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - x$, $I = \left(-\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{8}\right)$

Svolgimento:

$$v(x) = x + y(x)$$

$$v'(x) = 1 + y'(x) = 1 + 4v^2(x)$$

$$\int 1\,dx = \int \frac{v'}{1+4v^2}\,dx = \int \frac{1}{1+4v^2}\,dv \underset{z=2v}{=} \int \frac{1}{1+z^2}\,\frac{dz}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{atg} z + c = \frac{1}{2}\operatorname{atg}(2v) + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{atg}(2v) = x + c$$

$$v(0) = 0 + y(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{atg}(-1) = c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{8}$$

$$\operatorname{atg}(2v) = 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 2v = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - x$$

$$-\frac{\pi}{2} < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{8} < x < \frac{3}{8}\pi$$

(3) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 = 4, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Calcolare $\iint_\Sigma x \, dS$.

8 punti

Risposta:

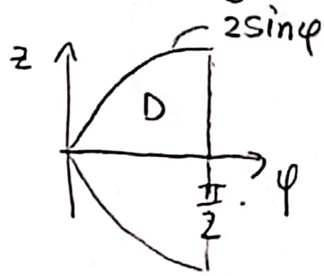
8

Svolgimento:

Σ è una porzione di superficie cilindrica

$$\sigma(\varphi, z) = \begin{cases} 2\cos\varphi = x \\ 2\sin\varphi = y \\ z \end{cases} \qquad \|\sigma_\varphi \wedge \sigma_z\| = 2$$

$$D = \{(\varphi, z) : \; 2\cos\varphi \geq 0, \; 2\sin\varphi \geq 0, \; z^2 \leq 4 - 4\cos^2\varphi\}$$
$$= \{\varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \; z^2 \leq 4\sin^2\varphi\}$$



$$\iint_\Sigma x \, dS = \iint_D 2\cos\varphi \cdot 2 \, d\varphi \, dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-2\sin\varphi}^{2\sin\varphi} 4\cos\varphi \, dz \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} 16 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= 8 \sin^2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = 8$$