

**Prova scritta di Geometria Gennaio 2012**

**Istruzioni.** Dopo aver svolto in brutta copia gli esercizi, riportare in bella forma negli spazi appositi qui sotto le soluzioni, evidenziando graficamente i risultati principali e dando le opportune, seppur sintetiche, giustificazioni.

1. Fissata la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , sia  $T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$  la trasformazione definita da  $T(M) = CM - MC$  per ogni  $M \in M(2 \times 2)$ . Verificare che  $T$  è lineare. Determinarne una matrice  $A$  che la rappresenti rispetto a qualche base. Quanto vale la traccia di  $T$ ? Calcolare il rango di  $T$ . Determinare una base per  $\ker T$  ed una base per  $\operatorname{im} T$ .

Nelle altre versioni:

Fissata la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , sia  $T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$  la trasformazione definita da  $T(M) = CM - MC$  per ogni  $M \in M(2 \times 2)$ .

Fissata la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ , sia  $T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$  la trasformazione definita da  $T(M) = CM + MC$  per ogni  $M \in M(2 \times 2)$ .

Fissata la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , sia  $T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$  la trasformazione definita da  $T(M) = CM + MC$  per ogni  $M \in M(2 \times 2)$ .

2. Sia assegnata la matrice  $3 \times 3$  seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 10 \\ -2 & 1 & -5 \\ 10 & -5 & 25 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è diagonalizzabile. Dire se è ortogonalmente diagonalizzabile. Trovare, se possibile, una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  costituita da autovettori per  $A$ . (Giustificare le proprie affermazioni).

Nelle altre versioni:

Sia assegnata la matrice  $3 \times 3$  seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 \\ -8 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

Sia assegnata la matrice  $3 \times 3$  seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia assegnata la matrice  $3 \times 3$  seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

**3.** L'area di un triangolo è  $\frac{5}{2}$ , due suoi vertici sono  $A(-3, 1)$  e  $B(1, 3)$ . Il terzo vertice  $C$  si trova sull'asse  $y$ . Determinare le coordinate di  $C$ .

Nelle altre versioni:

L'area di un triangolo è  $\frac{5}{2}$ , due suoi vertici sono  $A(-3, 1)$  e  $B(1, 3)$ . Il terzo vertice  $C$  si trova sull'asse  $x$ .

L'area di un triangolo è  $\frac{3}{2}$ , due suoi vertici sono  $A(3, 1)$  e  $B(1, -3)$ . Il terzo vertice  $C$  si trova sull'asse  $x$ .

L'area di un triangolo è  $\frac{3}{2}$ , due suoi vertici sono  $A(3, 1)$  e  $B(1, -3)$ . Il terzo vertice  $C$  si trova sull'asse  $y$ .