COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale.

| 2 | |

(a) Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ vettori linearmente indipendenti di V. Siano $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Allora:

☐ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ sono linearmente indipendenti
☐ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ sono linearmente dipendenti
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ sono linearmente dipendenti

Motivazione:

| 2 | |

(b) Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ vettori linearmente indipendenti di V. Siano $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$. Allora:

☐ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono linearmente indipendenti
☐ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono linearmente dipendenti
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono linearmente dipendenti

Motivazione:

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano siano date le rette:

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Sia verificata la condizione $a_1m + b_1n + c_1p = 0$. Allora:

| 2 | |

(a)
- ☐ le rette r e s sono parallele
- ☐ le rette r e s non sono parallele
- ☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se le rette r e s sono parallele

Motivazione:

| 2 | |

(b)
- ☐ le rette r e s sono ortogonali
- ☐ le rette r e s non sono ortogonali
- ☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se le rette r e s sono ortogonali

Motivazione:

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$E_k := \left\{(x, y, z, w) \mid x + k^2 y - z = k - 2\right\}$$

2	

(a) Determina il valore di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$k =$

Motivazione:

Nel resto dell'esercizio utilizza il valore di k determinato al punto precedente.

3	

(b) Determina una base ortonormale di E_k.

2	

(c) Determina una base per un sottospazio F supplementare di E_k in $\mathbb{R}^4$.

Motivazione:

4. Sia A la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

1	

(a) Detto f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è A, determina una base del nucleo di f:

3	

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

3	

(c) Determina una matrice diagonale A' e una matrice invertibile M tali che $A' = M^{-1}AM$.

$A' := \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

Motivazione:

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Sia dato al variare del numero reale k il punto $B := (k, 2k)$.

2	

(a) Determina tutti i valori di k per cui il quadrato di lato OB ha area uguale a 20:

$k =$

Motivazione:

Scegli uno dei valori di k determinati al punto a e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

3	

(b) Sia r la retta passante per i punti O e B e sia ρ il semipiano delimitato da r e contenente il punto $P := (0, 1)$. Determina i vertici C e D del quadrato $OBCD$ contenuto in ρ.

$C = (\quad , \quad)$ $D = (\quad , \quad)$

Motivazione:

2	

(c) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza passante per i punti O, B, C e D trovati al punto precedente.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano $\pi : x - 3y + 2z - 3 = 0$, il punto $P := (2, -1, 6)$ e la sfera $S : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

2	

(a) Determina la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π.

$H = (\quad , \quad , \quad)$

Motivazione:

3	

(b) Detta γ la circonferenza intersezione di π e S, determina il raggio r e il centro C di γ.

$r =$

$C = (\quad , \quad , \quad)$

Motivazione:

2	

(c) Determina l'equazione cartesiana di una sfera S', diversa da S, la cui intersezione con il piano π è la circonferenza γ.

Motivazione: