COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 7. Sia E un sottospazio vettoriale di V di dimensione 4.

2 (a) Se F è un sottospazio vettoriale di V di dimensione 5, determina la minima dimensione possibile per $E \cap F$.

$\dim(E \cap F) \geq$

Motivazione:

2 (b) Se G è un sottospazio vettoriale di V tale che $E \cap G = \{0\}$, determina la massima dimensione possibile per G.

$\dim G \leq$

Motivazione:

2. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento affine.

2 | (a) Siano dati i piani $\pi_1 : 2x - z - 2 = 0$ e $\pi_2 : 2y + z = 0$. Per quali valori del parametro reale k il piano $\pi : 4x - 6y - 5z + k = 0$ appartiene al fascio di piani individuato da π_1 e π_2?

Motivazione:

2 | (b) Siano dati i piani non paralleli $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ appartiene al fascio di piani individuato da π_1 e π_2 se e solo se: (dà una condizione algebrica)

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo definito dalle condizioni $f(1,0,0) := (0,2,0,1)$, $f(0,1,0) := (3,0,2,0)$ e $f(0,0,1) := (0,2,k-k^2,k^2)$, con k parametro reale.

2	

(a) Per quali valori di k l'immagine di f ha dimensione 2?

Motivazione:

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

2	

(b) Determina una base del nucleo di f.

Motivazione:

2	

(c) Esistono tre vettori distinti **u**, **v** e **w** che hanno la stessa immagine tramite f? Se sì, scrivere dei vettori siffatti, se no, spiegare perché non esistono.

☐ Tre vettori siffatti sono, ad esempio:	☐ Non esistono vettori siffatti. Infatti:

4. Sia A la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

| 2 | |

(a) Detto f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è A, determina una base del nucleo di f:

Motivazione:

| 3 | |

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

| 2 | |

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (1,4)$ e $B := (-1,1)$ e la retta $r : 2x + y - 7 = 0$.

2 (a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia rettangolo in B.

$C = (\quad , \quad)$

Motivazione:

2 (b) La circonferenza γ passante per i punti A, B e C ha equazione cartesiana:

Motivazione:

3 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (2, 1, 2)$ e le rette
$$r : \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \text{ e } s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

2	

(a) Il piano π contenente r e passante per il punto A ha equazione:

Motivazione:

2	

(b) Il piano σ contenente r e parallelo a s ha equazione:

Motivazione:

3	

(c) Le rette r e s sono:

☐ coincidenti ☐ incidenti ☐ parallele e distinte ☐ sghembe

Motivazione: