

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto  $A := (1, -2)$  e la circonferenza  $\gamma : (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$ . Allora:

2

- (a)  per il punto  $A$  passano due rette tangenti distinte alla circonferenza  $\gamma$   
 per il punto  $A$  passa un'unica retta tangente alla circonferenza  $\gamma$   
 per il punto  $A$  non passano rette tangenti alla circonferenza  $\gamma$

Motivazione:

2

(b) Il segmento congiungente  $A$  con il centro  $C$  di  $\gamma$  interseca la circonferenza  $\gamma$ ?

Sì     No

Motivazione:

2. Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione 4 e siano  $E$  ed  $F$  due sottospazi di  $V$  con  $\dim E = 3$  e  $\dim F = 2$ . Inoltre  $F$  **non** è contenuto in  $E$ .

2

- (a) La somma  $E + F$  è diretta?

- sicuramente sì  
 sicuramente no  
 i dati assegnati non permettono di stabilire se  $E + F$  è diretta o no

Motivazione:

2

- (b) Vale l'uguaglianza  $E + F = V$ ?

- sicuramente sì  
 sicuramente no  
 i dati assegnati non permettono di stabilire se  $E + F = V$  o no

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato, al variare del parametro reale  $k$ , il sottoinsieme  $E_k$  di  $\mathbb{R}^3$  così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid 2x + (k^2 + k)y + 3z = k^2 - 1\}$$

2

(a) Determina i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

2

(b) Determina i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

**Scegli uno dei valori di  $k$  determinati al punto b e utilizzalo nel resto dell'esercizio**

Valore di  $k$  scelto:

3

(c) Determina una base per un sottospazio  $F$  supplementare di  $E_k$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Motivazione:

4. Sia dato l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^4$  definito da  $f(x, y, z, w) := (x + y, -x - y, -w, z + 2w)$ .

2

(a) Il vettore  $\mathbf{v} := (1, 0, 0, 0)$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

sì     no

Motivazione:

3

(b) Determina gli autovalori di  $f$  e, per ciascuno di essi una base per il corrispondente autospazio. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore $\lambda$	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

2

(c)  $f$  è diagonalizzabile?

sì     no

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano date le tre rette  $r : 2x - y - 1 = 0$ ,  $s : 4x + 3y - 17 = 0$  e  $t_k : 2x + ky - 6 = 0$ , con  $k$  parametro reale.

2

- (a) Determina tutti i valori di  $k$  per cui le rette  $r$ ,  $s$  e  $t_k$  appartengono allo stesso fascio di rette.

Motivazione:

3

- (b) Determina il valore di  $k$  per cui le rette  $r$  e  $t_k$  sono ortogonali.

Motivazione:

**Nel resto dell'esercizio utilizza il valore di  $k$  determinato al punto (b) ( $r$  e  $t_k$  ortogonali).**

3

- (c) L'insieme dei punti interni al triangolo  $T$  individuato dalle rette  $r$ ,  $s$  e  $t_k$  è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto  $A := (1, 3, 2)$ , la retta

$$r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \text{ e la retta } s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

3	
---	--

 (a) Il piano  $\pi$  passante per il punto  $A$  e parallelo sia a  $r$  che a  $s$  ha equazione:

Motivazione:

2	
---	--

 (b) Il piano  $\sigma$  contenente  $r$  e ortogonale a  $\pi$  ha equazione:

Motivazione:

2	
---	--

 (c) La proiezione ortogonale di  $r$  sul piano  $\pi$  ha equazioni cartesiane:

Motivazione: