

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri la base di \mathbb{R}^3 formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 := (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 := (1, 1, 1)$. Si considerino i vettori $\mathbf{w}_1 := (1, 3, 1, 2)$ e $\mathbf{w}_2 := (2, 1, 3, -1)$ di \mathbb{R}^4 . Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $f(\mathbf{v}_1) := \mathbf{w}_1$, $f(\mathbf{v}_2) := \mathbf{w}_2$, $f(\mathbf{v}_3) := 2\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2$.

2

(a) L'applicazione f è suriettiva?

Sì No I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se f è suriettiva o no

Motivazione:

2

(b) L'applicazione f è iniettiva?

Sì No I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se f è iniettiva o no

Motivazione:

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo siano date le rette:

$$r_k : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 2 - kt \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

2

(a) Per quali valori di k le rette r_k e s sono parallele?

Motivazione:

2

(b) Per che valori di k le rette r_k e s sono ortogonali?

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a + bx + cx^2) := 2a + (a + b + c)x - ax^2.$$

1

(a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

$\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$

2

(b) Determinare una base del nucleo di f .

--

Motivazione:

--

2

(c) Stabilire se il polinomio $p(x) := 2 + x - x^2$ è autovettore di f e in caso affermativo rispetto a quale autovalore.

<input type="checkbox"/> il polinomio $p(x)$ è autovettore di f relativamente all'autovalore <input style="width: 30px;" type="text"/>
<input type="checkbox"/> il polinomio $p(x)$ non è autovettore di f

Motivazione:

--

2

(d) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata dai polinomi $x - x^2, 2 + x - x^2, x$.

$\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$

4. Sia E il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 generato dai tre vettori $\mathbf{u} := (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{v} := (0, 3, 0, 2)$ e $\mathbf{w} := (k^2, 0, 2, k - k^2)$, dove k è un parametro reale.

2

(a) Determinare i valori di k per cui si ha $\dim E < 3$.

Motivazione:

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

1

(b) La dimensione di E è:

2

(c) Determinare una base di un sottospazio F supplementare di E in \mathbb{R}^4 .

2

(d) Esiste un sottospazio G di \mathbb{R}^4 diverso da F e supplementare di E ? Se sì, scrivere una base di G , se no, spiegare perché non esiste.

<input type="checkbox"/> Una base per G è:	<input type="checkbox"/> Non esiste un sottospazio G con le proprietà richieste. Infatti:
--	---

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia dato il punto $C := (3, 2)$ e la retta $r : 2x - y - 9 = 0$.

2

(a) La circonferenza γ centrata in C e tangente la retta r ha equazione:

Motivazione:

2

(b) Determina il punto di tangenza H tra la retta r e la circonferenza γ .

Motivazione:

3

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici C , H e $O := (0, 0)$ è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (4, 7, -2)$ e la

$$\text{retta } r : \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

2

(a) La retta s parallela a r e passante per P ha equazioni:

Motivazione:

2

(b) Il piano π contenente sia r sia s ha equazione cartesiana:

Motivazione:

3

(c) La distanza tra r e s è:

Motivazione: