

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $\gamma$  la circonferenza del piano passante per i punti  $A := (2, 0)$ ,  $O := (0, 0)$  e  $B := (0, 2k)$  con  $k \neq 0$ .

2	
---	--

(a) Determina i valori di  $k$  per cui  $\gamma$  ha raggio 3:

--

Motivazione:

--

2	
---	--

(b) Determina i valori di  $k$  per cui  $\gamma$  è tangente alla retta  $r : 2x + y - 5 = 0$ :

--

Motivazione:

--

2. Sia  $f$  un omomorfismo da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  tale che  $f(2, 1) = (1, 1, 2)$  e  $f(1, -3) = (0, -2, 1)$ .

2

(a) I dati assegnati sono sufficienti per determinare  $f(5, -1)$ ?

Sì,  $f(5, -1) = ( \quad , \quad , \quad )$        No, non sono sufficienti

Motivazione:

2

(b) Il vettore  $(4, 0, 10)$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

Sì       No       I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $E$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  definito da  $E := \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\}$ .

2

(a) Determina una base di  $E$ .

Motivazione:

2

(b) Sia dato al variare di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}_k := (2, k, 1)$  e sia  $F$  il sottospazio generato da  $\mathbf{v}_k$ . Per quali valori di  $k$  si ha  $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ ?

Motivazione:

3

(c) Scegli  $k$  tale che  $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ .

Valore di  $k$  scelto:  $k =$

Esprimi il vettore  $(5, 5, 3)$  come somma di un vettore di  $E$  e di un vettore di  $F$ :

$$(5, 5, 3) = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

4. Sia  $A$  la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2

- (a) Detto  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è  $A$ , calcolare  $f(1, -1, -1)$ :

Motivazione:

2

- (b) Per quali valori di  $k$  il vettore  $(0, -1, k)$  è autovettore di  $f$ ?

Motivazione:

3

- (c) Determinare la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^3$  formata dai vettori  $(1, -1, -1)$ ,  $(0, -1, -1)$ ,  $(1, 2, 1)$ .

$$B := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia data la circonferenza

$$\gamma : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0.$$

2

(a) Il centro  $C$  e il raggio  $r$  di  $\gamma$  sono:

--	--

2

(b) La retta  $r$  tangente a  $\gamma$  nel punto  $P := (-1, -1)$  ha equazione cartesiana:

--

Motivazione:

--

3

(c) Detti  $A$  e  $B$  i punti d'intersezione della retta  $r$  con gli assi coordinati, l'area del triangolo  $ABC$  è:

--

Motivazione:

--

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette  $r : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$

e  $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

2

(a) Il piano  $\pi$  contenente  $r$  e parallelo a  $s$  ha equazione:

Motivazione:

2

(b) Il piano  $\sigma$  contenente  $s$  e parallelo a  $r$  ha equazione:

Motivazione:

3

(c) La regione di spazio delimitata dai due piani  $\pi$  e  $\sigma$  è definita dal sistema di disequazioni: