COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati la matrice a coefficienti reali $A_k := \begin{pmatrix} 2 & 3+k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale e il vettore colonna $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia diagonale?

Motivazione:

2	

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di A_k?

Motivazione:

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine sia data la retta $r : x - 2y + 3 = 0$ e i punti $A := (18, 9)$, $B := (30, 15)$ e $C := (20, 7)$.

2	

(a) La retta s passante per A e B interseca la retta r? ☐ Sì ☐ No

Il segmento di estremi A e B interseca la retta r? ☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2	

(b) La retta n passante per A e C interseca la retta r? ☐ Sì ☐ No

Il segmento di estremi A e C interseca la retta r? ☐ Sì ☐ No

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid x + y - 2z = k^2 + 4k\}.$$

Sia F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 1, 3)$ e $\mathbf{v} := (2, 1, 1)$

2 (a) Determina i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

Motivazione:

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

3 (b) Determina una base per $E_k \cap F$.

Motivazione:

2 (c) Determina una base ortonormale di E_k rispetto al prodotto scalare standard.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(p(x)) := 2p(x) + 3p'(x)$ (si ricorda che la derivata di un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ è $p'(x) = b + 2cx$).

2	

(a) Determina la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ (cioè la base formata da 1, x e x^2 in quest'ordine).

$$A := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Motivazione:

3	

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2	

(c) L'endomorfismo è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo siano dati il punto $A := (5, 2)$ e la retta $r : 4x + 3y - 1 = 0$.

2	

(a) Determina la proiezione ortogonale H di A su r: $\boxed{H = (\quad , \quad)}$

Motivazione:

3	

(b) Determina due punti B e C su r tali che ABC sia un triangolo di area 50 con i lati AB e AC uguali. $\boxed{B = (\quad , \quad)}$ $\boxed{C = (\quad , \quad)}$

Motivazione:

2	

(c) Determina un punto D diverso da A tale che DBC sia un triangolo di area uguale all'area di ABC con i lati DB e DC uguali. $\boxed{D = (\quad , \quad)}$

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $P := (1, 2, 3)$ appartenente al piano $\pi : 2x + 3y + z - 11 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$.

2

(a) Il piano σ contenente r e ortogonale a π ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

(b) La proiezione ortogonale di r sul piano π ha equazioni cartesiane:

Motivazione:

3

(c) Le sfere tangenti in P al piano π e aventi raggio $\sqrt{14}$ hanno equazioni cartesiane:

Motivazione: