COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i vettori $\mathbf{u} := (1, 2, 1, 1)$ e $\mathbf{v} := (3, 1, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^4$.

2 (a) Esiste un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 contenente entrambi i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$?

☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2 (b) Esiste un sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 contenente entrambi i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$?

☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano date le tre rette $r : 2x - y - 1 = 0$, $s : x + y - 5 = 0$ e $t_k : kx + 3y - 5 = 0$, con k parametro reale.

2	

(a) Determina tutti i valori di k per cui le rette r, s e t_k appartengono allo stesso fascio di rette.

Motivazione:

2	

(b) Determina tutti i valori di k per cui le rette r, s e t_k delimitano un triangolo rettangolo.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato il sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$E := \{(x, y, z, w) \mid x + y - z - w = 0\}.$$

2

(a) Determina una base di E.

Motivazione:

2

(b) Sia dato al variare del parametro reale k il vettore $\mathbf{w}_k := (2, k, 1, 0)$ e sia F_k il sottospazio vettoriale generato da $\mathbf{w}_k$. Per quali valori di k si ha che $\mathbb{R}^4 = E \oplus F_k$?

Motivazione:

3

(c) Detto G il sottospazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 0, 1, 2)$ e $\mathbf{v} := (1, 2, 2, 1)$ determina una base di $E \cap G$.

Motivazione:

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2

(a) Il vettore $\mathbf{v} := (1, 1, 0)$ appartiene all'immagine di f? ☐ Sì ☐ No

Motivazione:

3

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (3, 1)$, $B := (6, -2)$ e $C := (7, 4)$.

2	

(a) Determina un punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$D = (\quad , \quad)$

Motivazione:

2	

(b) Determina il semipiano delimitato dalla retta passante per A e B e contenente il punto C.

Motivazione:

3	

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $P := (2, 1, 1)$ e il piano $\pi : x + 2y + 2z - 15 = 0$.

2	

(a) La sfera S centrata in P e tangente il piano π ha equazione:

Motivazione:

2	

(b) La sfera T centrata in P la cui intersezione con il piano π è una circonferenza di raggio 4 ha equazione:

Motivazione:

3	

(c) Un piano σ parallelo al piano π e diverso da esso, la cui intersezione con la sfera T è una circonferenza di raggio 4 ha equazione cartesiana:

Motivazione: