

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato, al variare del parametro reale  $k$ , il sottoinsieme  $E_k$  di  $\mathbb{R}^3$  così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid 2(k^2 - k)x + y + 3z = k^2 - 1\}$$

2

(a) Determina i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

2

(b) Determina i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

2. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento affine e sia dato il triangolo  $T$  di vertici  $A := (1, 2)$ ,  $B := (4, 1)$  e  $C := (5, 7)$ . L'equazione della retta  $r_{AB}$  passante per  $A$  e  $B$  è  $x + 3y - 7 = 0$ , l'equazione della retta  $r_{BC}$  passante per  $B$  e  $C$  è  $6x - y - 23 = 0$  e l'equazione della retta  $r_{AC}$  passante per  $A$  e  $C$  è  $5x - 4y + 3 = 0$

2

- (a) Il punto  $P := (3, 3)$ :

è interno al triangolo  $T$      è esterno al triangolo  $T$      appartiene al bordo del triangolo  $T$

Motivazione:

2

- (b) Il punto  $Q := (-2, 3)$ :

è interno al triangolo  $T$      è esterno al triangolo  $T$      appartiene al bordo del triangolo  $T$

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  di matrice rappresentativa  $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  con  $k$  parametro reale e sia  $\mathbf{v} := (1, 2, 1)$  un vettore di  $\mathbb{R}^3$ .

2

(a) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene al nucleo di  $f$ ?

Motivazione:

2

(b) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}$  è autovettore di  $f$ ?

Motivazione:

3

(c) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

Motivazione:

4. Sia  $E$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $\mathbf{u} := (1, 0, 2, 1)$  e  $\mathbf{v} := (1, 2, -2, 3)$  e sia  $F := \{(x, y, z, t) \mid x + y + z - t = 0\}$ .

2

- (a) Determina la dimensione di  $E \cap F$

Motivazione:

2

- (b) Esistono due vettori linearmente indipendenti appartenenti a  $F$  ed ortogonali a  $\mathbf{u}$ ?

Sì     No

Motivazione:

3

- (c) Determina una base ortonormale di  $F$

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto  $P := (-11, 5)$  e la circonferenza  $\gamma : (x - 4)^2 + y^2 = 50$ . Siano  $r$  e  $s$  le rette passanti per  $P$  e tangenti a  $\gamma$  e siano  $R$  e  $S$  i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e  $\gamma$ .

2

- (a) Le rette  $r$  e  $s$  hanno equazioni cartesiane:

Motivazione:

2

- (b) Detto  $C$  il centro di  $\gamma$ , i triangoli  $CPR$  e  $CPS$  hanno la stessa area. Si calcoli l'area di uno dei due.

Motivazione:

3

- (c) Le bisettrici degli angoli formati dalle rette  $r$  e  $s$  hanno equazioni cartesiane:

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette  $r : \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x + y + z - 10 = 0 \end{cases}$

e  $s : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$  e sia  $P$  il punto d'intersezione tra la retta  $r$  e il piano di equazione  $x = 0$ .

3

(a) Il piano  $\pi$  contenente  $r$  e parallelo a  $s$  ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

(b) La retta  $l$  passante per  $P$  e parallela a  $s$  ha equazioni cartesiane:

Motivazione:

2

(c) La retta  $l$ :

è incidente il piano  $\pi$      giace sul piano  $\pi$      è parallela a  $\pi$  ma non giace su  $\pi$

Motivazione: